МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК 3D- ОБЪЕКТОВ В РАДИОЛОКАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ БЛИЖНЕГО ДЕЙСТВИЯ Л. В. Лабунец, Н. Н. Анищенко, А. Р. Яруллин

MATHEMATICAL SIMULATION of TRANSIENT RESPONSES for 3D OBJECTS in the NEAR RANGE RADAR SYSTEM L. V. Labunets, N. N. Anishchenko, A. R. Yrullin

Представлена методика имитационного цифрового моделирования радиолокационных переходных характеристик (РПХ) 3D- объектов в ближней зоне. Показано, что аппаратно - программная реализация свертки зондирующего сигнала с РПХ составляет надежную информационную основу генерации в режиме реального времени сигналов радиолокационных целей для комплексов полунатурного моделирования.

The technique of digital simulation for radar transient responses of 3D- objects in a near field zone is represented. It is shown, that hard-software realization for convolution of a probing signal with radar transient response makes a reliable information basis for the real-time mode generating the radar targets signals in complexes of semi-scale modeling.

ВВЕДЕНИЕ

Современный этап развития теории синтеза и анализа автономных информационных систем дистанционного зондирования характеризуется интенсивным развитием методов цифрового моделирования полей целей и входных сигналов оптических и радиолокационных устройств, функционирующих в ближней зоне. В системах автоматизированного проектирования цифровое моделирование занимает главенствующие позиции по отношению к физическому

моделированию и натурным измерениям. Цифровые модели предоставляют совершенно новые, уникальные возможности по совершенствованию и оптимизации всей процедуры извлечения полезной информации о цели. Это обуславливает необходимость разработки новых вычислительных методов и статистических моделей полей различной физической природы.

В ближней зоне действия локатора - $R_{S0} \le 4L_{MAX}^2/\lambda_S$ и коротковолновой области спектра электромагнитных волн - $\lambda_S \le 0.3\,\mathrm{M}$, адекватные результаты дают модели:

- [1 4] реализующие методы физической теории дифракции (ФТД);
- [5, 6] основанные на методе конечных разностей (МКР) для численного решения уравнений Максвелла;
- [7, 8] применяющие соответственно многополюсный метод и метод конечных элементов.

Здесь R_{s0} - расстояние от фазового центра передающей антенны до условного центра цели, L_{max} – ее наибольший линейный размер, а λ_s - длина волны несущего колебания зондирующего излучения.

Указанные модели радиолокационных характеристик (РЛХ) по определению являются имитационными, поскольку построены по принципу цифровой имитации физических процессов отражения электромагнитного излучения объектом локации. Математическое описание электромагнитных свойств покрытия цели, ее пространственной конфигурации и, на заключительном этапе, реализация электродинамических методов численного интегрирования или дифференцирования воспроизводят в вычислительном эксперименте условия натурных измерений. В этом смысле указанные цифровые модели предполагают значительные вычислительные затраты, то есть не являются по определению моделями "реального" времени. С другой стороны, возможность формирования на их основе адекватных баз данных и получения оценок статистических свойств РЛХ позволяет решать такие важные в практических приложениях задачи, как сжатие данных и моделирование в режиме "реального" времени профиля отра-

женных импульсов, а также построение информативного признакового пространства малой размерности для классификации целей. Рациональный подход к решению сформулированных задач связан, по нашему мнению, с обобщением понятия переходной характеристики [9, 10] - на радиолокационный диапазон спектра электромагнитных волн (ЭМВ).

1. РАДИОЛОКАЦИОННЫЙ ПОРТРЕТ 3D- ОБЪЕКТА

Важным этапом математического моделирования РЛХ в ближней зоне является синтез полигональной сетки на поверхности геометрического образа 3D- объекта. Достаточно большое количество $M \approx 10^5$ элементарных отражателей, распределенных по поверхности цели, позволяет представить сферическую электромагнитную волну зондирующего излучения в окрестности каждого фацета локально плоской. Иными словами, расстояния R_{sm} и R_{Rm} от фазовых центров передающей и приемной антенн до m- ого полигона сетки (рис. 1) и его линейный размер L_m должны удовлетворять критерию дальней зоны $L_m \leq \sqrt{\lambda_s \min{(R_{sm}, R_{Rm})/4}}$, $(m=1, 2, \mathbf{K}, M)$.

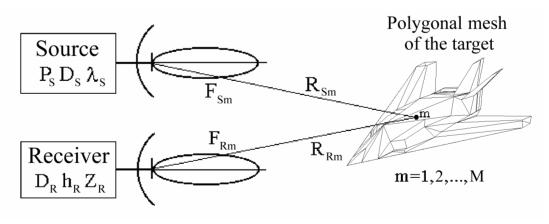


Рис. 1. Схема радиолокации в ближней зоне

Для вывода РЛХ в ближней зоне введем следующие обозначения (рис. 1): P_s - мощность излученного сигнала, D_s и D_R - коэффициенты направленного действия (КНД) передающей и приемной антенн в направлениях максимумов

излучения и приема, $h_{\scriptscriptstyle R}$ и $Z_{\scriptscriptstyle R}$ - модуль действующей высоты и сопротивление излучения приемной антенны, $F_{\rm S\,m}$ и $F_{\rm R\,m}$ - значения нормированных функций направленности (амплитудные характеристики по полю) передающей и приемной антенн в направлении на т - й элементарный отражатель. Кроме того, сформируем поляризационный базис ${\mathbf{r}_{s_m}, \mathbf{r}_{s_m}^{(1)}, \mathbf{r}_{s_m}^{(2)}}$ локально плоской волны, падающей на элементарный отражатель (**puc. 2**). Здесь $\overset{\mathbf{r}}{\mathbf{r}}_{\mathrm{S}\,\mathrm{m}}$ - единичный орт радиуса - вектора \mathbf{R}_{Sm} фацета в системе координат излучателя. Орт $\mathbf{e}_{\mathrm{Sm}}^{(2)}$ определяет направление главной поляризации в локальном базисе падающей волны. Он характеризует амплитуду горизонтальной (вещественной) составляющей $A_{S\,m}^{(2)} = A_{S}^{(2)} \cos\left(\theta_{Z}\right)$ вектора напряженности электрического поля в окрестности элементарного отражателя. Орт $\overset{\mathbf{r}}{\mathrm{e}}_{\mathrm{S}\,\mathrm{m}}^{(1)}$ задает направление линейной поляризации локальном базисе падающей волны. Отвечающая ему амплитуда $A_{S\,m}^{(1)}=A_{S}^{(2)}\sin\left(\theta_{Y}\right)\sin\left(\theta_{Z}\right)+A_{S}^{(1)}\cos\left(\theta_{Y}\right)\! imes\,\exp(\,i\psi)\,$ для вертикальной (комплексной) составляющей вектора напряженности электрического поля в окрестности фацета, смещена, в случае эллиптической поляризации, на фазовый угол ψ .

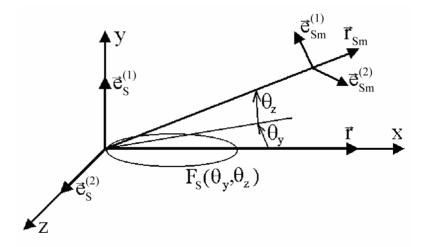


Рис. 2. Поляризационный базис волны, падающей на фацет

Плотность потока мощности локально плоской волны, излученной в направлении на m – й фацет, определяется по известному соотношению [11]

$$G_{\rm S} = \frac{P_{\rm S}D_{\rm S}F_{\rm S\,m}^2}{4\pi R_{\rm S\,m}^2} = \frac{\left|\frac{{\bf r}}{{\rm E}_{\rm S\,m}}\right|^2}{2{\rm Z}_0},$$

где $Z_0 = 120\pi$ ом — волновое сопротивление воздуха. В соответствии с последним равенством, вектор - столбец $\overset{\mathbf{r}}{E}_{S\,m} = \left(E_{S\,m}^{(1)} \quad E_{S\,m}^{(2)}\right)^{T}$ комплексной огибающей (то есть без учета сомножителя $\exp\{kc_0t\}$) напряженности поля облучения вблизи m — ого фацета определяется следующим образом:

$$(E_{Sm}^{(1)} \quad E_{Sm}^{(2)})^{T} = \sqrt{\frac{P_{S}D_{S}Z_{0}}{2\pi}} \times \frac{\exp(-ikR_{Sm})}{R_{Sm}} F_{Sm} \times (A_{Sm}^{(1)} \quad A_{Sm}^{(2)})^{T}.$$
 (1)

Здесь т — символ транспонирования, $k=2\pi/\lambda$ - волновое число, c_0 - скорость света.

Отражающие свойства фацета в ближней зоне описывает поляризационная матрица рассеяния. В отличие от общепринятого определения [12], ее удобно представить в виде

$$\begin{pmatrix}
E_{R m}^{(1)} \\
E_{R m}^{(2)}
\end{pmatrix} = \frac{\exp(-ikR_{R m})}{R_{R m}} \times \begin{pmatrix}
\rho_{m}^{(11)} & \rho_{m}^{(12)} \\
\rho_{m}^{(21)} & \rho_{m}^{(22)}
\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}
E_{S m}^{(1)} \\
E_{S m}^{(2)}
\end{pmatrix}.$$
(2)

Элементы этой матрицы $\rho_m^{(jk)}$ измеряются для случая линейной поляризации излучения и приема $(\psi=0)$. Они представляют собой комплексные коэффициенты отражения, выраженные в метрах, для соответствующих составляющих в поляризационных базисах падающей $\left\{ {\stackrel{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}}_{\text{S}\,\text{m}},\stackrel{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{e}}_{\text{S}\,\text{m}}^{(1)},\stackrel{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{e}}_{\text{S}\,\text{m}}^{(2)}} \right\}$ и отраженной $\left\{ {\stackrel{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}}_{\text{R}\,\text{m}},\stackrel{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{e}}_{\text{R}\,\text{m}}^{(1)},\stackrel{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{e}}_{\text{R}\,\text{m}}^{(2)}} \right\}$ волн. Здесь ${\stackrel{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}}}_{\text{R}\,\text{m}}$ - единичный орт радиуса - вектора ${\stackrel{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R}}}_{\text{R}\,\text{m}}$ элементарного отражателя в базисе приемной антенны.

Величина напряженности электрического поля, рассеянного m - м фацетом в апертуру приемной антенны, представляет собой скалярное произведение вектора - столбца $\overset{\mathbf{r}}{\mathrm{E}}_{\mathrm{R}\,\mathrm{m}} = \left(\mathrm{E}_{\mathrm{R}\,\mathrm{m}}^{(1)} \ \mathrm{E}_{\mathrm{R}\,\mathrm{m}}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}$ напряженности поля в окрестности приемной антенны и ее поляризационных составляющих $A_{\mathrm{R}\,\mathrm{m}}^{(1)}$ и $A_{\mathrm{R}\,\mathrm{m}}^{(2)}$: $\mathrm{E}_{\mathrm{Rm}}(\lambda) = A_{\mathrm{Rm}}^{(1)} \mathrm{E}_{\mathrm{Rm}}^{(1)} + A_{\mathrm{Rm}}^{(2)} \mathrm{E}_{\mathrm{Rm}}^{(2)}$. Раскрывая последнее равенство согласно выражениям (1) и (2), несложно получить

$$\rho_{m}(\lambda) = A_{Rm}^{(1)} \left(\rho_{m}^{(11)} A_{Sm}^{(1)} + \rho_{m}^{(12)} A_{Sm}^{(2)} \right) + A_{Rm}^{(2)} \left(\rho_{m}^{(21)} A_{Sm}^{(1)} + \rho_{m}^{(22)} A_{Sm}^{(2)} \right),$$

$$g_{m} = F_{Sm} \sqrt{\frac{P_{S} D_{S} Z_{0}}{2\pi}}; \quad E_{Rm}(\lambda) = \frac{g_{m} \rho_{m}(\lambda)}{R_{Sm} R_{Rm}} \times \exp\left\{-ik\left(R_{Sm} + R_{Rm}\right)\right\}, \quad (3)$$

где $\rho_m(\lambda)$ [м] - спектр комплексного коэффициента отражения m – ого фацета цели. Его значение зависит от следующих факторов: длин волн падающего излучения; поляризационных характеристик передающей и приемной антенн; взаимного расположения антенной системы и элементарного отражателя, а также его размеров и электромагнитных свойств покрытия.

Для зондирующего сигнала $u_s(t) = u_v(t) \cos\left(\Omega_s t\right)$ с конечной полосой частот $\left[N_{\text{MIN}}/T_s, N_{\text{MAX}}/T_s\right]$ радиофизическую задачу рассеяния ЭМВ объектом сложной формы рационально решать спектральным методом. Здесь $\Omega_s = 2\pi c_o/\lambda_s$ - частота несущего колебания; T_s - период повторения модулирующей последовательности видеоимпульсов $u_v(t)$ единичной амплитуды, заданной формы и длительности τ_s . Соответствующую периодическую последовательность зондирующих радиоимпульсов во временной области удобно представить комплексной формой дискретного ряда Фурье

$$u_{s}(t) = \sum_{n=-N_{MAX}}^{-N_{MIN}} U_{s}[n] \exp(i n \omega_{s} t) + \sum_{n=N_{MIN}}^{N_{MAX}} U_{s}[n] \exp(i n \omega_{s} t) =$$

$$= \sum_{n=-N_{MAX}}^{-N_{MIN}} U_{s}[n] \exp\{i k[n] c_{0} t\} + \sum_{n=N_{MIN}}^{N_{MAX}} U_{s}[n] \exp\{i k[n] c_{0} t\},$$

где $U_s[n] = U_s(n \, \omega_s)$ - отсчет комплексного спектра зондирующих радиоимпульсов на дискретной частоте $\omega[n] = n \, \omega_s$ (длине волны $\lambda[n] = c_0 T_s/n$), кратной основной $\omega_s = 2\pi/T_s$; $k[n] = 2\pi/\lambda[n]$ - дискретное значение волнового числа.

В частотной области дискретный спектр Фурье отраженных радиоим-пульсов имеет вид $w_R[n] = E_{Rm}(\lambda[n])U_S[n]$. Тогда, с учетом выражения (3) сигнал, отраженный m-m фацетом в апертуру приемной антенны, определяется с помощью обратного преобразования Фурье

$$e_{R_{m}}(t) = \frac{g_{m}}{R_{S_{m}}R_{R_{m}}} \left\{ \sum_{n=-N_{MAX}}^{-N_{MIN}} W_{R}[n] \exp(ik[n]c_{0}t) + \sum_{n=N_{MIN}}^{N_{MAX}} W_{R}[n] \exp(ik[n]c_{0}t) \right\}; \quad (4)$$

Комплексный спектр отраженных радиоимпульсов удобно представить в следующем структурном виде

$$\begin{split} W_{_{R}}[\,\,n] = \rho_{_{m}}[\,\,n]\,V_{_{m}}[\,\,n]; \quad V_{_{m}}[\,\,n] = U_{_{S}}[\,\,n] exp \Big\{\!-\,i\,k[\,\,n] \big(R_{_{S\,m}} + R_{_{R\,m}}\big)\Big\}. \end{split}$$
 Здесь $\rho_{_{m}}[\,n] = \rho_{_{m}}(\lambda[\,n])$ и $\rho_{_{m}}(\lambda) = |\,\rho_{_{m}}(\lambda)| exp \big\{i\,\vartheta_{_{m}}(\lambda)\big\}.$

В дальнейшем будем рассматривать зондирующие радиоимпульсы достаточно большой длительности, то есть такие, пространственная протяженность которых $c_0 \tau_s/2$ значительно превышает наибольший линейный размер $\max_m \{L_m\}$ фацетов объекта локации. Для этого случая рациональным является следующее упрощающее допущение. Будем считать, что в узкой полосе частот зондирующего сигнала спектр коэффициента отражения фацетов практически не изменяется по сравнению с его значением на длине волны несущего колебания $\rho_m(\lambda) = \rho_m(\lambda_s)$, (m=1,2,...,M).

В силу известных свойств Фурье- преобразования, совершенно очевидно, что процесс отражения ЭМВ элементарным участком поверхности цели моделируется последовательностью следующих операций во временной области относительно зондирующих радиоимпульсов $\mathbf{u}_{s}(t)$:

- запаздывания по отношению к моменту излучения на временной интервал $t_m = \left(R_{Sm} + R_{Rm}\right) / c_0 \quad \text{(сомножитель } V_m[n] \text{ в спектре Фурье } W_R[n] \text{ для радиоимпульсов, отраженных фацетом);}$
- сдвига по фазе несущего колебания радиоимпульсов на величину $\vartheta_{_{S\,m}} = \vartheta_{_{m}}(\lambda_{_{S}})$ (сомножитель $\exp(\,i\,\vartheta_{_{S\,m}})$ в спектре Фурье);
- линейной свертки с импульсной характеристикой $\left| \rho_m(\lambda_s) \right| \cdot \delta(t)$ в виде δ -функции Дирака (сомножитель $\left| \rho_m(\lambda_s) \right|$);
- линейного преобразования с амплитудным коэффициентом $g_{\,{}_{m}}/(R_{\,{}_{S\,m}}R_{_{R\,m}})$.

В этом смысле, при отражении ЭМВ, фацеты вносят искажения в спектр зондирующего радиоимпульса лишь за счет фазовых смещений несущего колебания. Иными словами, оценка обратного преобразования Фурье (4) без учета эффекта Доплера имеет вид

$$e_{Rm}(t) \approx \frac{g_{m}}{R_{Sm}R_{Rm}} \times \int_{t_{MIN}}^{t_{MAX}} u_{V}(\theta) \cos \left(\Omega_{S}\theta + \vartheta_{Sm}\right) \left|\rho_{m}(\lambda_{S})\right| \delta(t - \theta) d\theta =$$

$$= \frac{g_{m}u_{V}(\tau)}{R_{Sm}R_{Rm}} \left\{\eta_{m}^{SR} \cos \left(\Omega_{S}\tau\right) - \mu_{m}^{SR} \sin \left(\Omega_{S}\tau\right)\right\}$$
(5)

для значений $t_{\rm m} \leq t \leq t_{\rm m} + \tau_{\rm m} + \tau_{\rm s}$ и ноль в противном случае. Здесь $\tau = t - t_{\rm m}$ - локальное время; $\eta_{\rm m}^{\rm SR} = {\rm Re}\{\rho_{\rm m}(\lambda_{\rm s})\}$ и $\mu_{\rm m}^{\rm SR} = {\rm Im}\{\rho_{\rm m}(\lambda_{\rm s})\}$; $\tau_{\rm m} = 2L_{\rm m}/c_{\rm 0}$ - временной интервал запаздывания, обусловленный конечным размером фацета,

$$t_{\text{MIN}} = \begin{cases} t_{\text{m}} &, t_{\text{m}} \leq t < t_{\text{m}} + \tau_{\text{m}} \\ t - \tau_{\text{m}} &, t_{\text{m}} + \tau_{\text{m}} \leq t \leq t_{\text{m}} + \tau_{\text{m}} + \tau_{\text{S}} \end{cases}; t_{\text{MAX}} = \begin{cases} t_{\text{m}} &, t_{\text{m}} \leq t < t_{\text{m}} + \tau_{\text{S}} \\ t_{\text{m}} + \tau_{\text{S}} &, t_{\text{m}} + \tau_{\text{S}} \leq t \leq t_{\text{m}} + \tau_{\text{m}} + \tau_{\text{S}} \end{cases}.$$

Таким образом, достаточно полная информация об амплитудных и фазовых РЛХ 3D- объекта в ближней зоне содержится в пятимерном массиве данных $\left\{x_{m}^{t},y_{m}^{t},z_{m}^{t},\eta_{m}^{SR},\mu_{m}^{SR}\right\}$, $\left(m\!=\!1,2,\!\mathbf{K},M\right)$. Его первые три элемента - это декартовы координаты т – ого элементарного отражателя в системе координат объекта (СКО) (рис. 3). Разумно запоминать лишь те фацеты, из их общего количества М, которые облучаются и наблюдаются при текущем положении антенной системы локатора в СКО. Последние два элемента массива – это значения действительной и мнимой частей комплексного коэффициента отражения фацета на длине волны несущего колебания. Такой массив, определенный для фиксированного положения передающей и приемной антенн локатора относительно цели, представляет собой ее текущий радиолокационный портрет (РЛП). Имитационное цифровое моделирование временной последовательности РЛП в процессе пролета локатора вблизи антропогенного объекта составляет методическую и информационную основу создания моделей "реального" времени сигналов радиолокационных целей для комплексов полунатурного моделирования.

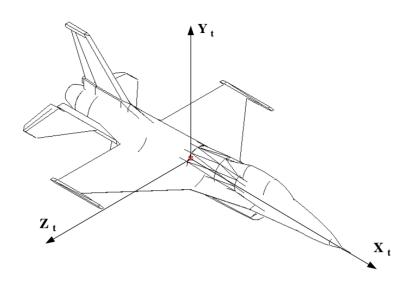


Рис. 3. Кусочно-аналитическая модель истребителя F-16. Фрагмент прогрессивно развивающейся сетки нулевого уровня

2. УДЕЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ 3D- ОБЪЕКТА

Элементарный отражатель объекта локации формирует напряжение в согласованной нагрузке приемной антенны, пропорциональное напряженности электрического поля рассеяния (5) $u_{R\,m}(t) = h_R \times e_{R\,m}(t)$. Коэффициентом пропорциональности является модуль действующей высоты антенны $h_R = F_{R\,m} \sqrt{\pi D_R Z_R/Z_0}/k$. Необходимые подстановки дают следующую зависимость

$$\begin{split} u_{R\,m}(t) &= \frac{U\,F_{m}}{R_{S\,m}R_{R\,m}} \bigg\{ \sum_{n=-N_{MAX}}^{-N_{MIN}} \frac{W_{R}[n]}{k[n]} \, exp(\,i\,k[n]c_{0}t) + \sum_{n=N_{MIN}}^{N_{MAX}} \frac{W_{R}[n]}{k[n]} \, exp(\,i\,k[n]c_{0}t) \bigg\}; \, (6) \\ &\qquad \qquad U = \sqrt{P_{S}D_{S}D_{R}Z_{R}/2} \, ; \quad F_{m} = F_{S\,m}F_{R\,m} \, . \end{split}$$

Длинны волн зондирующего излучения в квазиоптическом диапазоне спектра меньше радиусов кривизны элементарных отражателей объекта локации. Для описания закономерностей рассеяния ЭМВ такими фацетами рациональным (по критерию вычислительных затрат) является применение асимптотических методов ФТД. В частности, адекватной является модель РЛХ в виде аддитивной когерентной композиции полей, рассеянных тремя основными ис-

точниками вторичного излучения [1 - 4, 13]. Это пространственно распределенные элементы гладкой части поверхности (линейные или квадратичные), сегменты двугранных вогнутых структур (ДВС) и острых кромок цели.

Описание первой составляющей модели опирается на интегральное представление Стреттона - Чу и оценку распределения поверхностных токов методом касательной плоскости. Получено представление компонент поля в апертуре приемной антенны в виде поверхностных интегралов по облучаемой и видимой гладкой части объекта [1 – 3, 13]. Кубатурные формулы для вычисления этих интегралов представлены в форме двумерного дискретного преобразования Фурье (ДПФ) по пространственным частотам отражающей поверхности в узлах полигональной сетки интегрирования. Такого рода оценки, оказались весьма удобными при расчете полей, рассеянных плоскими базовыми пространственными элементами (БПЭ) геометрического образа цели. Методом Гордона [14] получены кубатурные формулы численного интегрирования быстро осциллирующих двумерных функций. Этот результат позволил уточнить выражения для коэффициентов ДПФ по пространственным частотам квадратичных БПЭ в узлах триангуляционной сетки интегрирования.

Описание двукратного отражения фацет - фацет основано на методе трассировки лучей и формировании зеркального источника эквивалентного тока. В англоязычной литературе этот алгоритм известен как SBR— метод (Shooting and Bouncing Rays) [2, 3, 15].

Компонента поля, рассеянного острыми кромками представлена в виде суперпозиции парциальных краевых волн [16], формируемых локально - линейными сегментами ребер цели. Расчетная формула, связывает оценку напряженности парциальной краевой волны с угловыми функциями ракурса и эквивалентными токами локального возбуждения [3, 4, 16, 17]. Для однопозиционных систем эти токи удобно рассчитывать с помощью коэффициентов дифракции в форме Уфимцева.

Анализ полученных расчетных формул показал, что спектральные коэффициенты $\rho_m(\lambda)$ для отражателей первых двух типов (гладких и сегментов

ДВС) прямо пропорциональны волновому числу k и геометрической площади фацета S_m , то есть $\rho_m(\lambda) = kS_m \, \sigma_m(\lambda)$, причем в случае ДВС все характеристики учитываются для фацета второго отражения. Таким образом, в соответствии с формулами (5) и (6), эти регулярные рассеивающие элементы цели создают следующую последовательность отраженных радиоимпульсов

$$u_{Rm}(t) = \frac{U F_{m} S_{m}}{R_{Sm} R_{Rm}} \times \left\{ \sum_{n=-N_{MAX}}^{-N_{MIN}} \sigma_{m}[n] V_{m}[n] \exp(ik[n]c_{0}t) + \sum_{n=N_{MIN}}^{N_{MAX}} \sigma_{m}[n] V_{m}[n] \exp(ik[n]c_{0}t) \right\} \approx \frac{U F_{m} S_{m}}{R_{Sm} R_{Dm}} u_{v}(\tau) \left\{ \eta_{m}^{SR} \cos\left(\Omega_{S}\tau\right) - \mu_{m}^{SR} \sin\left(\Omega_{S}\tau\right) \right\}.$$
(7)

Здесь $\tau = t - t_m$; $\eta_m^{SR} = Re\{\sigma_m(\lambda_S)\}$ и $\mu_m^{SR} = Im\{\sigma_m(\lambda_S)\}$. Безразмерная величина $\sigma_m(\lambda)$ имеет смысл спектра комплексного удельного коэффициента отражения элемента плоскости, квадратичной поверхности или сегмента ДВС.

В случае элемента острой кромки, (отражателя третьего типа объекта ло-кации) спектральный коэффициент $\rho_m(\lambda)$ прямо пропорционален геометрической длине L_m локально линейного сегмента ребра, то есть $\rho_m(\lambda) = L_m \, \sigma_m(\lambda)$ [1 - 4, 13]. Здесь безразмерная величина $\sigma_m(\lambda)$ имеет смысл спектра комплексного удельного коэффициента отражения для элемента острой кромки. Эта характеристика согласуется с физическим смыслом ребра, как сингулярного (линейного) рассеивателя. Ее подстановка в формулу (6), с учетом соотношения $\omega = kc_0$, позволяет представить выражение (6) в следующем структурном виде

$$\begin{split} u_{Rm}(t) &= \sum_{n=-N_{MAX}}^{-N_{MIN}} \!\! \Phi_{R}[n] exp(ik[n]c_{0}t) + \sum_{n=N_{MIN}}^{N_{MAX}} \!\! \Phi_{R}[n] exp(ik[n]c_{0}t); \\ \Phi_{R}[n] &= \frac{c_{0}UF_{m}L_{m}}{R_{Sm}R_{Rm}} \times \sigma_{m}[n] \times \frac{exp(i\pi/2)}{i\omega[n]} \times V_{m}[n]. \end{split}$$

Ясно, что процесс отражения ЭМВ ребрами цели моделируется следующими операциям во временной области относительно зондирующих радиоимпульсов $\mathbf{u}_s(t)$:

- запаздывания по отношению к моменту излучения на временной интервал t_m (сомножитель $V_m[n]$ в спектре Фурье $\Phi_R[n]$ для радиоимпульсов, отраженных сегментом ребра);
- сдвига по фазе на величину p/2 несущего колебания радиоимпульсов и их интегрирования в пределах временного интервала $[t-\tau_m,t]$, обусловленного конечным размером $L_m = c_0 \tau_m/2$ сегмента ребра (сомножитель $\exp(i\pi/2)/(i\omega[n])$ в спектре Фурье);
- сдвига по фазе на величину $\vartheta_{_{S\,m}} = Arg\{\sigma_{_m}(\lambda_{_S})\}$ несущего колебания радиоимпульсов (сомножитель $exp(i\vartheta_{_{S\,m}})$ в спектре Фурье);
- линейной свертки с импульсной характеристикой сегмента ребра в виде δ функции Дирака $L_m |\sigma_m(\lambda_s)| \cdot \delta(t)$ (сомножитель $L_m |\sigma_m(\lambda_s)|$);
- линейного преобразования с коэффициентом $c_0 U F_m / (R_{Sm} R_{Rm})$.

Тогда, последовательность радиоимпульсов, отраженных сегментом острой кромки, получим в виде

$$u_{Rm}(t) \approx \frac{c_0 U F_m L_m |\sigma_m(\lambda_S)|}{R_{Sm} R_{Rm}} \times \int_{t-\tau_m}^t u_V(\theta - t_m) \sin \left(2\pi c_0 \frac{t_m - \theta}{\lambda_s} - \vartheta_{Sm}\right) d\theta.$$

В силу соотношения $\tau_m << \tau_s$ видеоимпульсы практически не изменяются на временном интервале $[t-\tau_m,t]$. Их можно вынести за знак интегрирования по теореме о среднем интегральном для произведения двух функций. Соответствующие преобразования дают окончательное выражение для последовательности радиоимпульсов, отраженных элементарными участками ребер цели

$$u_{Rm}(t) \approx -2 \frac{U F_{m} L_{m}^{2}}{R_{sm} R_{Rm}} \frac{\sin \varphi_{m}}{\varphi_{m}} u_{v}(\tau) \left\{ \eta_{m}^{SR} \sin \left(\Omega_{S} \tau - \varphi_{m}\right) + \mu_{m}^{SR} \cos \left(\Omega_{S} \tau - \varphi_{m}\right) \right\}. (8)$$

Здесь $\tau = t - t_{\rm m}$; $\phi_{\rm m} = 2\pi L_{\rm m}/\lambda_{\rm S}$ - дополнительное фазовое смещение несущего колебания радиоимпульсов за счет конечного размера сегмента ребра, а $\eta_{\rm m}^{\rm SR}$ и $\mu_{\rm m}^{\rm SR}$ - действительная и мнимая части удельного коэффициента отражения элемента острой кромки на длине волны несущего колебания.

Очевидно, что инвариантность РЛХ в ближней зоне к параметрам полигональной сетки, синтезированной на поверхности 3D- объекта, достигается формированием его РЛП на основе спектральных удельных коэффициентов отражения, то есть $\eta_m^{SR} = \text{Re}\{\sigma_m(\lambda_s)\}$, $\mu_m^{SR} = \text{Im}\{\sigma_m(\lambda_s)\}$, $(m=1,2,\mathbf{K},M)$.

3. ЭФФЕКТИВНАЯ ПЛОЩАДЬ РАССЕЯНИЯ 3D- ОБЪЕКТА В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ

Выраженный в вольтах сигнал цели в согласованной нагрузке приемной антенны, представляет собой когерентную сумму временных последовательностей радиоимпульсов (7) и (8), рассеянных регулярными и сингулярными типами элементарных отражателей

$$u_{R}(t-T_{MIN}) = U\left\{\sum_{m=1}^{M_{S}} \delta_{m}^{(S)} U_{Rm}^{(S)}(t-t_{m}) - 2\sum_{m=1}^{M_{L}} \delta_{m}^{(L)} U_{Rm}^{(L)}(t-t_{m})\right\}.$$

Здесь $T_{\text{MIN}} = \min_{m} \{t_{m}\}$ - временной интервал запаздывания; M_{s} - количество элементов плоскостей, квадратичных поверхностей и сегментов ДВС; M_{L} - количество сегментов острых кромок объекта локации; $\delta_{m}^{(s)}$ и $\delta_{m}^{(L)}$ - характеристические функции, принимающие значение единица, если соответствующие регулярные и сингулярные отражатели облучаются и наблюдаются при текущем положении антенной системы локатора в СКО, и ноль — в противном случае;

$$U_{Rm}^{(S)}(\tau) \approx \frac{F_{Sm}F_{Rm}S_{m}}{R_{Sm}R_{Rm}} u_{v}(\tau) \epsilon_{Rm}^{(COS)}(\tau)$$

- последовательность радиоимпульсов, формируемая текущим регулярным отражателем;

$$U_{R\,m}^{(L)}(\tau) \approx \frac{F_{S\,m}F_{R\,m}L_{m}^{2}}{R_{S\,m}R_{R\,m}} \frac{\sin\phi_{m}}{\phi_{m}} u_{v}(\tau) \left\{ \epsilon_{R\,m}^{(SIN)}(\tau)\cos\phi_{m} - \epsilon_{R\,m}^{(COS)}(\tau)\sin\phi_{m} \right\}$$

- последовательность радиоимпульсов, формируемая текущим сингулярным отражателем цели.

С физической точки зрения такого рода суммирование эквивалентно пространственно-временной свертке зондирующих радиоимпульсов. Временную

свертку реализуют элементарные отражатели, распределенные по поверхности цели. Пространственную свертку реализует антенная система локатора.

В полученных выражениях $\epsilon_{R\,m}^{\,({\rm cos})}(\tau)$ и $\epsilon_{R\,m}^{\,({\rm sin})}(\tau)$ - суть сопряженные по Гильберту квадратурные составляющие аналитического сигнала с частотой несущего колебания $\Omega_{\rm S}$. Мгновенные огибающая и фаза этого сигнала — суть модуль и аргумент удельного коэффициента отражения m- ого фацета 3D- объекта на длине волны $\lambda_{\rm S}$.

$$\begin{split} & \epsilon_{R\,m}^{\,(\mathrm{COS})}(\,\,\tau) \!=\! \left|\,\,\sigma_{_{\mathrm{m}}}(\lambda_{_{\mathrm{S}}})\,\right| \cos\left(\Omega_{_{\mathrm{S}}}\tau \!+\! \vartheta_{_{\mathrm{S}\,\mathrm{m}}}\right) \!=\, \eta_{_{\mathrm{m}}}^{_{\mathrm{S}\,\mathrm{R}}} \,\cos\left(\Omega_{_{\mathrm{S}}}\tau\right) \!-\! \mu_{_{\mathrm{m}}}^{_{\mathrm{S}\,\mathrm{R}}} \,\sin\left(\Omega_{_{\mathrm{S}}}\tau\right) \!;\\ & \epsilon_{R\,\mathrm{m}}^{\,(\mathrm{SIN})}(\,\,\tau) \!=\! \left|\,\,\sigma_{_{\mathrm{m}}}(\lambda_{_{\mathrm{S}}})\,\right| \sin\left(\Omega_{_{\mathrm{S}}}\tau \!+\! \vartheta_{_{\mathrm{S}\,\mathrm{m}}}\right) \!=\! \eta_{_{\mathrm{m}}}^{_{\mathrm{S}\,\mathrm{R}}} \,\sin\left(\Omega_{_{\mathrm{S}}}\tau\right) \!+\! \mu_{_{\mathrm{m}}}^{_{\mathrm{S}\,\mathrm{R}}} \,\cos\left(\Omega_{_{\mathrm{S}}}\tau\right) \!. \end{split}$$

Ясно также, что импульсная мощность отраженного объектом локации сигнала, представляет собой величину мгновенной огибающей для последовательности импульсов $P_R(t-T_{MIN})=u_R^2(t-T_{MIN})/(2Z_R)=P_SD_SD_RP_{REL}(t-T_{MIN})/4$, где

$$P_{REL}(t - T_{MIN}) = \left\{ \sum_{m=1}^{M_S} \delta_m^{(S)} U_{Rm}^{(S)}(t - t_m) - 2 \sum_{m=1}^{M_L} \delta_m^{(L)} U_{Rm}^{(L)}(t - t_m) \right\}^2.$$
 (9)

Фундаментальной энергетической РЛХ объекта локации в дальней зоне является его эффективная площадь рассеяния (ЭПР). По определению она характеризует величину средней мощности радиоимпульса, отраженного целью в апертуру приемной антенны [18]. Для импульсных условий облучения, когда $\tau_{\rm S} < 2L_{\rm MAX}/c_0$, спектр ЭПР удобно выразить с помощью нормированного частотного коэффициента отражения цели. Пусть, в отличие от общепринятого определения [12], эта характеристика измеряется в метрах

$$H_{R}(\lambda) = 2\sqrt{\pi} R_{S0} \frac{\sum_{m} E_{Rm}(\lambda)}{|E_{S0}|}; \quad \Xi_{R}(\lambda) = |H_{R}(\lambda)|^{2}; \quad \Xi(\lambda) = \lim_{R_{S0} \to \infty} \{\Xi_{R}(\lambda)\}.$$

Значение $\Xi_{R}(\lambda)$ удобно рассматривать как спектр ЭПР в ближней зоне [2, 4]. Не трудно видеть, что эта характеристика представляет собой спектральную плотность энергии нормированного частотного коэффициента отражения. Здесь

 $E_{s\,0}$ - комплексная огибающая напряженности поля облучения вблизи условного центра цели. Подстановки выражений (1) и (3) в последние равенства дают

$$H_{R}(\lambda) = 2\sqrt{\pi} \frac{R_{S0}^{2}}{F_{S0}} \sum_{m} \frac{F_{Sm}}{R_{Sm}R_{Rm}} \rho_{m}(\lambda) \exp\{-ik(R_{Sm} + R_{Rm})\}; \qquad (10)$$

Суммирование производится по элементарным отражателям, которые облучаются и наблюдаются при текущем положении антенной системы локатора в СКО.

Нормированный частотный коэффициент отражения (10) в ближней зоне не инвариантен к выбору положения условного центра цели R_{s_0} и значений функции направленности передающей антенны локатора F_{s_m} . В этой связи, разумно ввести его альтернативное определение

$$H_{R}(\lambda) = 2\sqrt{\pi} \sum_{m} R_{Sm} \frac{E_{Rm}(\lambda)}{|E_{Sm}|}.$$
 (11)

Скользящая нормировка по комплексной огибающей напряженности поля облучения вблизи каждого элементарного отражателя объекта локации обеспечивает инвариантность РЛХ к указанным выше параметрам. После подстановки выражений (1) и (3) в последнее равенство получим

$$H_{R}(\lambda) = 2\sqrt{\pi} \sum_{m} \frac{R_{Sm}}{R_{Rm}} \rho_{m}(\lambda) \exp\left\{-ik\left(R_{Sm} + R_{Rm}\right)\right\}, \qquad (12)$$

В обоих случаях, предельный переход $R_{s_0} \to \infty$, с учетом соотношений $R_{s_m} \approx R_{r_m} \approx R_{s_0}$ и $F_{s_m} \approx F_{s_0}$, приводит к выражениям для нормированного частотного коэффициента отражения и спектра ЭПР в дальней зоне

$$H(\lambda) = 2\sqrt{\pi} \sum_{m} \rho_{m}(\lambda) \exp\left\{-i k \left(R_{Sm} + R_{Rm}\right)\right\};$$

$$\Xi(\lambda) = 4\pi \left|\sum_{m} \rho_{m}(\lambda) \exp\left\{-i k \left(R_{Sm} + R_{Rm}\right)\right\}\right|^{2}.$$
(13)

Важно отметить, что рассмотренные выше РЛХ не инвариантны к выбору функции направленности приемной антенны локатора $F_{\rm R\ m}$.

В качестве нормированной импульсной характеристики цели $h_N(t)$ во временной области будем рассматривать обратные преобразования Фурье относительно дискретных отсчетов передаточных функций (10) или (12) в полосе частот зондирующих радиоимпульсов. С учетом операции запаздывания по отношению к моменту излучения на временной интервал t_m , преобразование, например спектра (12), дает

$$h_{N}(t-T_{MIN}) = \sum_{m} \frac{R_{Sm}}{R_{Rm}} h_{m}(t-t_{m}),$$
 (14)

где периодическая последовательность сигналов $h_m(\tau)$ есть не что иное, как импульсная характеристика m- ого фацета, а $\tau = t - t_m$ - локальное время.

При сверхширокополосной локации, когда 3D- объект облучается сигналами достаточно малой длительности $\tau_{\rm S} < \tau_{\rm m} = 2L_{\rm m}/c_{\rm 0}$, их полоса частот практически бесконечна. Поэтому

$$h_{m}(\tau) = 4\sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} |\rho_{m}[n]| \cos(k[n]c_{0}\tau + \vartheta_{m}[n]).$$

Здесь полагается, что $\rho_m[0]=0$ и $\vartheta_m[n]=\vartheta_m(\lambda[n])$. Умножение коэффициента отражения фацета $\rho_m(\lambda)$ на спектр физически реализуемого зондирующего сигнала в широкой полосе частот приводит к искажению этой спектральной РЛХ, поскольку во временной области импульсная характеристика элементарного отражателя $h_m(\tau)$ сглаживается в соответствии с операцией свертки с зондирующим импульсом. На наш взгляд, это один из существенных недостатков сверхширокополосной локации.

Альтернативный метод анализа спектральных свойств цели состоит в ее зондировании радиоимпульсами достаточно большой длительности $\tau_{s} > 2\max_{m} \{L_{m}\}/c_{o} \ .$ Полоса частот $\lfloor N_{\text{MIN}}/T_{s} \ , N_{\text{MAX}}/T_{s} \rfloor$ такого рода сигналов достаточно узкая, что позволяет, в принципе, сканировать спектр нормированного коэффициента отражения объекта локации $H_{R}(\lambda)$. Именно в этом смысле

целесообразно рассматривать отличную от общепринятого определения импульсную характеристику

$$h_{Sm}(\tau) = 4\sqrt{\pi} \sum_{n=N_{MIN}}^{N_{MAX}} |\rho_m[n]| \cos(k[n]c_0\tau + \vartheta_m[n]),$$

то есть сигнал, отраженный фацетом при его облучении радиоимпульсами стандартной формы, достаточно большой длительности τ_s , следующими с периодом повторения T_s и частотой несущего колебания Ω_s . Как и прежде, полагаем, что в полосе частот $\left[N_{\text{MIN}}/T_s,N_{\text{MAX}}/T_s\right]$ спектральные характеристики фацета практически неизменны, то есть $\left|\rho_{\text{m}}[n]\right| \approx \left|\rho_{\text{m}}(\lambda_s)\right|$ и $\vartheta_{\text{m}}[n] \approx \vartheta_{\text{m}}(\lambda_s)$. Тогда импульсная характеристика принимает следующий вид

$$\begin{split} h_{_{S\,m}}(\tau) &\approx \text{Re}\big[\,\rho_{_{m}}(\lambda_{_{S}})\big] h_{_{S\,m}}^{\,(\text{COS})}(\tau) - \text{Im}\big[\,\rho_{_{m}}(\lambda_{_{S}})\big] h_{_{S\,m}}^{\,(\text{SIN})}(\tau); \\ h_{_{S\,m}}^{\,(\text{COS})}(\tau) &= 4\sqrt{\pi} \, \sum_{_{_{n=N_{_{MIN}}}}}^{N_{_{MAX}}} \cos\big(\,k\big[\,n\big]\,c_{_{0}}\tau\big) = \Delta_{_{S}}(\pi\xi) \sin\,c^{-1}(\pi\xi) \cos\big(\Omega_{_{S}}\tau\big); \\ h_{_{S\,m}}^{\,(\text{SIN})}(\tau) &= 4\sqrt{\pi} \, \sum_{_{_{_{n=N_{_{MIN}}}}}}^{N_{_{MAX}}} \sin\,(k\big[\,n\big]\,c_{_{0}}\tau\big) = \Delta_{_{S}}(\pi\xi) \sin\,c^{-1}(\pi\xi) \sin\,\big(\Omega_{_{S}}\tau\big). \end{split}$$

Здесь $\xi = \tau/T_s$ - локальное относительное время. Ясно, что для достаточно большого периода T_s функция $\sin c(\pi\xi) \approx 1$. Кроме того, при любой полосе спектра $N_s = (N_{\text{MAX}} - N_{\text{MIN}} + 1) \sim T_s/\tau_s$ функция $\Delta_s(\theta) = 4\sqrt{\pi} \sin(N_s\theta)/\theta$ обладает, как известно [19, с. 608], фильтрующим свойством. Более того, по мере уменьшения длительности импульса τ_s , $\lim_{N_s \to \infty} \left\{ \Delta_s(\pi\xi) \right\} = 4\sqrt{\pi} \, T_s \, \delta(\tau)$. В последних равенствах сопряженные по Гильберту сигналы $h_{sm}^{(\cos)}(\tau)$ и $h_{sm}^{(\sin)}(\tau)$ уместно назвать квадратурными импульсными характеристиками m- ого фацета.

Таким образом, в ближней зоне нормированная импульсная характеристика (14) представляет собой когерентную сумму импульсных характеристик элементарных отражателей цели. Средняя мощность такого сигнала за один период повторения $T_{\rm S}$ вычисляется, как известно, по формуле

$$P_{R} = \frac{1}{T_{S}} \int_{T_{MIN}}^{T_{MAX}} h_{N}^{2}(t) dt = 2 \sum_{n=N_{MIN}}^{N_{MAX}} |H_{R}[n]|^{2}; H_{R}[n] = H_{R}(\lambda[n]).$$

Здесь $\lambda[n]=2\pi c_0/(n\,\omega_s)$ - дискретный отсчет длины волны; $T_{\text{MIN}}=\min_m\{\,t_m\}$ и $T_{\text{MAX}}=\tau_s+\max_m\{\,t_m+\tau_m\}$ - временной интервал отраженного радиоимпульса, а $T_R=T_{\text{MAX}}-T_{\text{MIN}}$ - его длительность. В качестве значения ЭПР Σ_R объекта локации для импульсных условий его облучения рационально рассматривать величину $q_R P_R$, где $q_R=T_S/T_R$ - скважность периодической последовательности $h_N(t)$. Соответствующие подстановки дают

$$\Sigma_{R} = 2q_{R} \sum_{n=N_{MIN}}^{N_{MAX}} |H_{R}[n]|^{2} = 2q_{R} \sum_{n=N_{MIN}}^{N_{MAX}} \Xi_{R}[n].$$

Проведенный анализ позволяет в качестве импульсной ЭПР цели рассматривать текущее значение мгновенной огибающей следующего сигнала $\sigma_R(t) = h_N^2(t) \big/ T_R \; . \; \text{Его площадь} \; \int_{T_{MIN}}^{T_{MAX}} \sigma_R(t) dt \; , \; \text{как не трудно видеть, - суть} \\ \Im \PiP \; \Sigma_R \; .$

С учетом условия нормировки (11), получим импульсную характеристику объекта локации в абсолютных единицах

$$h_{R}(t-T_{MIN}) = \sum_{m} \frac{|E_{Sm}|}{R_{Sm}} \times \frac{R_{Sm}}{R_{Rm}} h_{Sm}(t-t_{m}) = h_{R}^{(COS)}(t-T_{MIN}) - h_{R}^{(SIN)}(t-T_{MIN}).$$

Здесь косинусная и синусная импульсные характеристики цели имеют вид:

$$h_{R}^{(COS)}(t-T_{MIN}) = \sum_{m} g_{m} \frac{Re[\rho_{m}(\lambda_{S})]}{R_{Sm}R_{Rm}} h_{Sm}^{(COS)}(t-t_{m});$$

$$h_{R}^{(SIN)}(t-T_{MIN}) = \sum_{m} g_{m} \frac{Im[\rho_{m}(\lambda_{S})]}{R_{Sm}R_{Rm}} h_{Sm}^{(SIN)}(t-t_{m}).$$

Тогда, в соответствии с принципом суперпозиции линейная свертка этих РЛХ с зондирующим сигналом $u_s(t)$ дает временную развертку отраженного сигнала

$$u_{R}(t-T_{MIN})=u_{R}^{(COS)}(t-T_{MIN})-u_{R}^{(SIN)}(t-T_{MIN})$$

по его косинусной $u_R^{(COS)}(\tau)$ и синусной $u_R^{(SIN)}(\tau)$ составляющим. В силу двусторонних ограничений сигнала $u_S(\tau)=0$ для значений $\tau \notin [0,\tau_S]$ и импульсной характеристики $h_R(\tau)=0$ для значений $\tau \notin [0,T_R]$, получим

для локального времени $0 \le \tau \le T_R + \tau_S$ и ноль в противном случае. Здесь

$$\boldsymbol{\tau}_{\scriptscriptstyle MIN} = \begin{cases} 0 &, \, 0 \leq \tau < \tau_{\scriptscriptstyle S} \\ \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{\scriptscriptstyle S} \;, \, \boldsymbol{\tau}_{\scriptscriptstyle S} \leq \tau \leq \boldsymbol{T}_{\scriptscriptstyle R} + \boldsymbol{\tau}_{\scriptscriptstyle S} \end{cases}; \quad \boldsymbol{\tau}_{\scriptscriptstyle MAX} = \begin{cases} \boldsymbol{\tau} &, \, 0 \leq \tau < \boldsymbol{T}_{\scriptscriptstyle R} \\ \boldsymbol{T}_{\scriptscriptstyle R} \;, \, \boldsymbol{T}_{\scriptscriptstyle R} \leq \tau \leq \boldsymbol{T}_{\scriptscriptstyle R} + \boldsymbol{\tau}_{\scriptscriptstyle S} \end{cases}.$$

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКПЕРИМЕНТ 1

В соответствии с представленной методикой проводилось имитационное цифровое моделирование РЛП и ЭПР сферы и плоского диска радиусами 1 метр, а также аналогичных РЛХ для аэродинамических объектов – крылатой ракеты Tomahavk, самолета F-16 и вертолета АН-64 (Apache) на длине волны несущего колебания $\lambda_{\rm S}=0$,03 метра. Расчеты проводились в ближней зоне для случая идеальной проводимости объектов локации и согласованной вертикальной поляризации изотропных ($F_{\rm S\,m}=F_{\rm R\,m}\equiv 1$) передающей и приемной антенн локатора.

Первый этап моделирования предусматривает создание геометрического образа 3D- объекта. Удобным, на наш взгляд, является кусочно-аналитическое описание пространственной конфигурации цели с помощью системы, представленной в работе [13]. В системе реализован способ конструктивно - геометрического моделирования (КГМ) твердых тел, основанный на конечном множестве примитивов и конструкторе - бинарном дереве построения модели из примитивов с использованием теоретико-множественных операций. Множество примитивов включает в себя базовые пространственные элементы (БПЭ) трех типов. Первые два типа - суть участки плоскостей, ограниченные либо полиго-

ном, либо полигональным контуром с участками кривых второго порядка. Третий тип БПЭ - суть участки квадратичных поверхностей.

В системе реализован принцип граничного представления (ГП) в виде явного математического описания множества БПЭ модели, которые связаны отношениями инцидентности в определенный граф смежности. Параметризация БПЭ опирается на рациональные модели поверхностей в базисе В- сплайнов [3]. Переход от КГМ к ГП 3D- объекта осуществляется с помощью объектно-ориентированной библиотеки геометрического моделирования. Ее процедуры выполняют все необходимые топологические преобразования над БПЭ. Программное обеспечение системы включает в себя набор алгоритмов анализа затенений — маскировки элементарных отражателей на поверхности объекта локации, поиска и идентификации параметров геометрических мест точек в виде действительных ребер и двугранных вогнутых структур цели, а также ее визуализации с любого заданного ракурса.

Кусочно-аналитическое описание является удобным в вычислительном отношении способом параметризации для генерации адаптивных полигональных сеток на поверхности цели. Это весьма важное преимущество позволило реализовать адаптивные алгоритмы численного интегрирования (дифференцирования) дифракционных полей рассеяния объектов локации. Перспективными направлениями, в этом смысле, являются интерполирующие и аппроксимирующие алгоритмы подразбиения (subdivision) [20] и вейвлеты второго поколения [21] для построения поверхностей произвольной топологии. На рис. 3 представлена кусочно-аналитическая модель истребителя F-16 и фрагмент полигональной сетки начального приближения. Последующие рисунки 4 – 6 демонстрируют результаты работы модифицированного алгоритма бабочки [20] в процессе формирования прогрессивно развивающейся сетки.

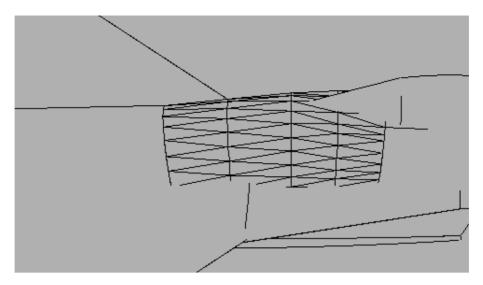


Рис. 4. Фрагмент прогрессивно развивающейся сетки первого уровня

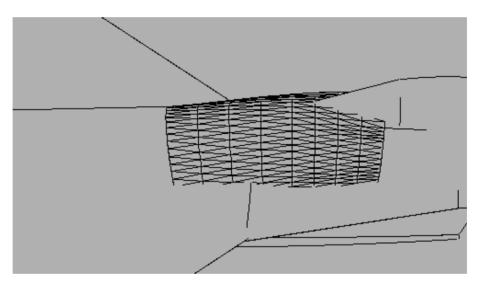


Рис. 5. Фрагмент прогрессивно развивающейся сетки второго уровня

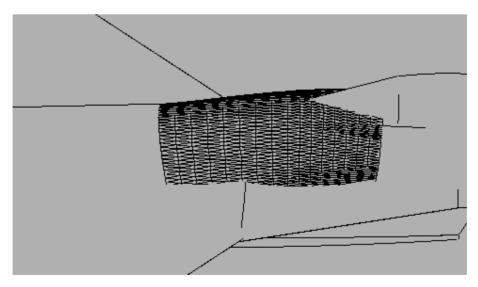


Рис. 6. Фрагмент прогрессивно развивающейся сетки третьего уровня

Важно также отметить, что программная реализация кусочноаналитического описания 3D- объекта представляет собой иерархическую структуру данных: цель -> ее конструктивный элемент (фюзеляж, крыло, хвост и т. п.) -> БПЭ -> полигон -> фацет. Такого рода иерархия необходима, прежде всего, при создании моделей "реального" времени для сигналов радиолокационных целей. Популярная методология синтеза быстрых моделей реализует принцип относительно малого набора (до сотни) дискретных отражателей 3Dобъекта. Один или несколько БПЭ являются естественной основой для задания текущего дискретного отражателя и расчета его РЛХ.

Еще одно важное преимущество кусочно-аналитического описания конфигурации цели отмечено в работе [3]. Параметризация поверхности в базисе рациональных В- сплайнов, заданных на нерегулярной сетке, обладает свойством локальной управляемости. Это означает, что при изменении координат фиксированного узла сетки конфигурация поверхности изменяется лишь в локальной окрестности этого узла. Данное свойство позволяет достаточно просто сформулировать целевую функцию при решении задач оптимизации формы поверхности и параметров ее радиопоглощающего покрытия. Применение методов работы [23] позволяет, в этом случае, осуществить глобальную минимизацию коэффициентов отражения 3D- объекта.

На рис. 7 – 9 представлены геометрические образы триады целей. Как видно из рисунков, кусочно-аналитической модели 3D- объекта вполне по силам достаточно точно описать пространственную конфигурацию, например, вертолета. В этом смысле не корректным, мягко выражаясь, является утверждение, высказанное в работе [4], о том, что "... использование кусочно-аналитической модели в задачах ближней радиолокации объектов сложной формы нецелесообразно...". Вслед за всемирно известным сатириком необходимо сказать: "слухи о смерти кусочно-аналитической модели геометрического образа цели несколько преувеличены ...".

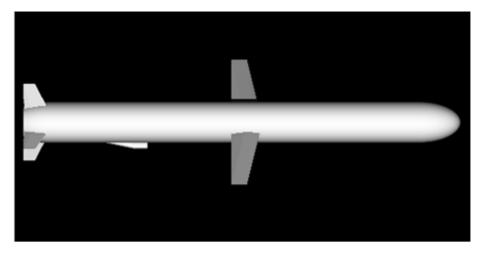


Рис. 7. Геометрический образ крылатой ракеты Tomahavk

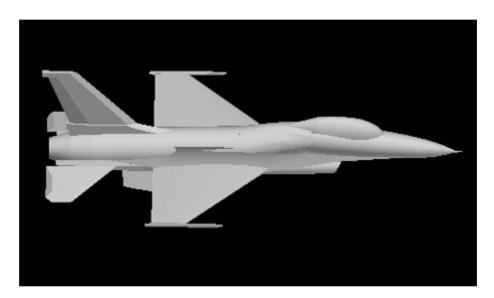


Рис. 8. Геометрический образ истребителя F-16

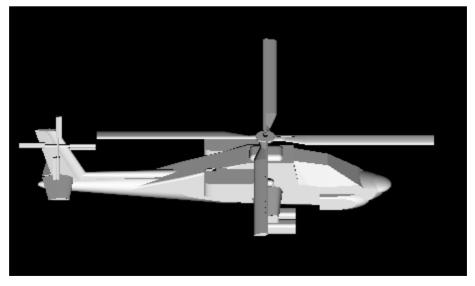


Рис. 9. Геометрический образ вертолета АН-64

При расчетах РЛХ плоского диска на его поверхности синтезировалась адаптивная сетка, состоявшая из фацетов прямоугольной формы. Два атрибута фацета реализовали механизм формирования сетки интегрирования с переменным шагом на поверхности плоских БПЭ. Прежде всего, соотношение линейного размера отражателя L_m с заданными долями d_{MIN} и d_{MAX} длины волны несущего колебания λ_s относили фацет к одному из трех типов. В зависимости от соотношений $L_m/\lambda_s \leq d_{\text{MIN}}$, $d_{\text{MIN}} < L_m/\lambda_s \leq d_{\text{MAX}}$ или $L_m/\lambda_s > d_{\text{MAX}}$ отражатель классифицировался как небольшой, средних размеров или большой. Кроме того, девять точек прямоугольного фацета задавали схему его подразбиения на четыре равные части. Инцидентность этих узлов сетки плоскому БПЭ определяла отражатель с текущими размерами, как не принадлежащий, частично принадлежащий (пограничный) или полностью принадлежащий полигону. Соответствующие шесть логических переменных, а также степень заполнения стека с заданным объемом памяти, формулировали правила для трех возможных манипуляций с текущей ячейкой интегрирования:

- деления на четыре равные части и помещения трех суб- фацетов в стек в соответствии с технологией LIFO;
- расчета РЛХ фацета и извлечения из стека очередного отражателя;
- извлечения из стека очередного отражателя.

Параметр d_{MAX} задавал максимально допустимый размер фацета, при котором расчет его РЛХ производился. В противном случае ячейка интегрирования подлежала делению на четыре равные части. Напротив, параметр d_{MIN} определял степень детализации границы БПЭ. На **рис. 10** и **11** представлены сетки интегрирования плоского диска соответственно с параметрами грубого - $d_{MIN} = 0.5$ $d_{MAX} = 2$ и подробного - $d_{MIN} = 0.25$ $d_{MAX} = 0.5$ подразбиения. Распределение модуля $|\sigma_m(\lambda_s)|$ удельного коэффициента отражения по поверхности диска изображено на **рис. 12**. Этот РЛП рассчитывался для случая нормального облучения — наблюдения диска, его подробного подразбиения и расстоя-

ния 5 метров между центром диска и приемоизлучающей системой. Зависимости ЭПР диска $\Xi_R(\lambda_s) = |H_R(\lambda_s)|^2$ от дальности до локатора R_{s0} (на длине волны несущего колебания $\lambda_s = 0.03$ м) приведены на **рис. 13**. Точками, на этом рисунке, отмечены вычисления по формуле (10), то есть случай не инвариантной нормировки частотного коэффициента отражения к выбору положения условного центра цели R_{s0} . Сплошная линия отвечает вычислениям по формуле (12), то есть случаю скользящей нормировки. В дальней зоне обе зависимости асимптотически стремятся к теоретическому значению $10 \text{ Lg}(\pi k^2 r_d^4) = 51,393$ дБ для ЭПР диска радиусом $r_d = 1$ м. Важно отметить, что в ближней зоне флуктуации ЭПР диска достигают значений 15-20 дБ.

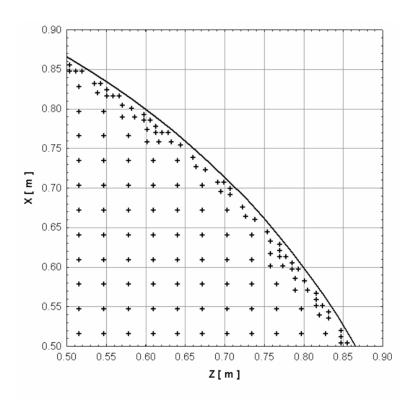


Рис. 10. Адаптивная сетка интегрирования плоского диска: $d_{MIN} = 0.5$; $d_{MAX} = 2$

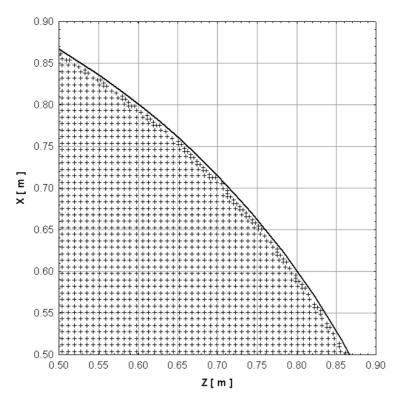


Рис. 11. Адаптивная сетка интегрирования плоского диска: $d_{\text{MIN}} = 0.25$; $d_{\text{MAX}} = 0.5$

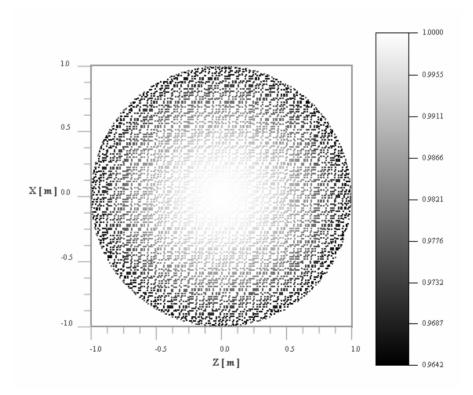


Рис. 12. Модуль удельного коэффициента отражения плоского диска на длине волны 3 см

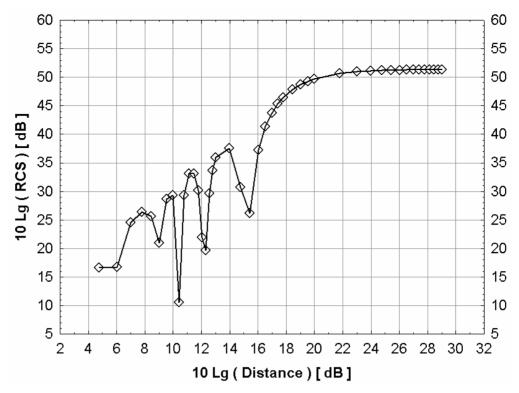


Рис. 13. Зависимости ЭПР плоского диска от дальности до локатора на длине волны 3 см

При расчетах РЛХ сферы на ее поверхности синтезировалась полигональная сетка, состоявшая из M=48716 облучаемых фацетов треугольной формы. Линейный размер каждого элементарного отражателя составлял, в этом случае, не более $\lambda_s/8$. Действительные $\eta_m^{SR}=\text{Re}\{\sigma_m(\lambda_s)\}$ и мнимые $\mu_m^{SR}=\text{Im}\{\sigma_m(\lambda_s)\}$ части удельных коэффициентов отражения множества фацетов сферы представлены соответственно на **puc. 14** и **15**. Распределение модуля $|\sigma_m(\lambda_s)|$ удельного коэффициента отражения по поверхности сферы изображено на **puc. 16**. Эти РЛП также рассчитывались для расстояния 5 метров между центром сферы и приемоизлучающей системой. Зависимости ЭПР сферы от дальности до локатора на длине волны несущего колебания приведены на **puc. 17**. Верхний график, на этом рисунке, иллюстрирует вычисления по формуле (10). Нижний график отвечает вычислениям по формуле (12). В дальней зоне обе зависимости асимптотически стремятся к теоретическому значению π для ЭПР сферы радиусом один метр.

Real part of the apportioned reflection coefficient

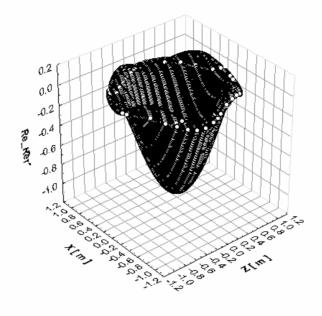
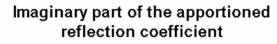


Рис. 14. Действительная часть удельного коэффициента отражения сферы на длине волны 3 см



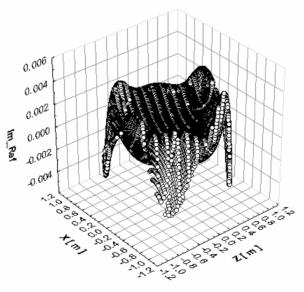


Рис. 15. Мнимая часть удельного коэффициента отражения сферы на длине волны 3 см

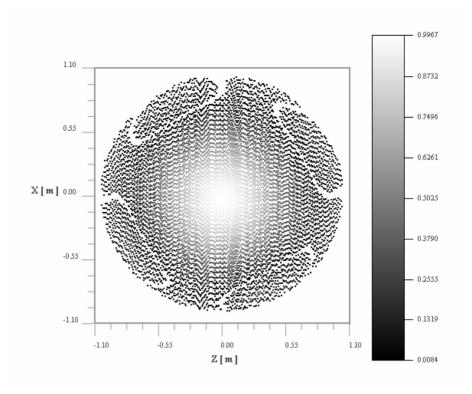


Рис. 16. Модуль удельного коэффициента отражения сферы на длине волны 3 см

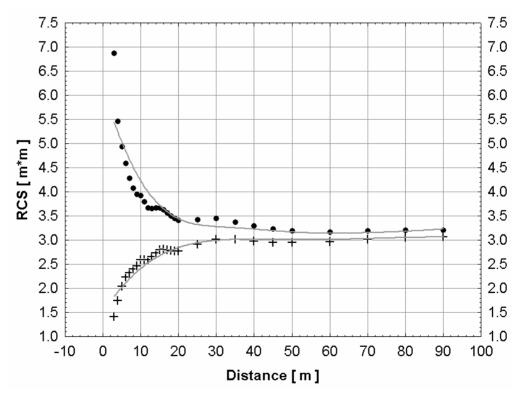


Рис. 17. Зависимости ЭПР сферы от дальности до локатора на длине волны 3 см

При расчетах РЛХ крылатой ракеты Tomahavk полигональная сетка на ее поверхности состояла из М = 49653 облучаемых фацетов. Интегрирование по поверхности плоских БПЭ геометрического образа ракеты (рис. 7) реализовано с помощью адаптивных кубатурных алгоритмов, представленных в работах [9, 13]. В этом случае формировались фацеты прямоугольной формы с параметрами подразбиения - $d_{\text{MIN}} = 0.25$ $d_{\text{MAX}} = 0.5$. На поверхности квадратичных БПЭ синтезировались фацеты треугольной формы с линейными размерами не более $\lambda_s/8$. Две формы визуализации для распределения модуля $|\sigma_{_m}(\lambda_s)|$ удельного коэффициента отражения по поверхности крылатой ракеты представлены на рис. 18 и 19. Этот РЛП соответствует положению локатора в точке с координатами $\left\{X_{S\,0}^{t}=0,Y_{S\,0}^{t}=-5,Z_{S\,0}^{t}=0\right\}$ в СКО. Для этого случая **рис. 20** демонстрирует оценку плотности распределения вероятности (в виде гистограммы, сглаженной сдвигом - ASH) для логарифма модуля удельного коэффициента отражения ракеты $10 \, \text{Lg} \left\{ \left| \, \sigma_{\text{m}}(\lambda_{\text{S}}) \right| / \sigma_{\text{MAX}} \right\}$. На том же рисунке приведена интегральная функция распределения. Динамический диапазон изменения удельного коэффициента отражения ракеты для этого ракурса облучения - наблюдения составляет 22,22 дБ и 27,82 дБ с вероятностями 0,99 и 0,999 соответственно. Зависимости ЭПР крылатой ракеты от дальности до локатора на длине волны несущего колебания приведены на рис. 21. График, отмеченный толстой линией на рисунке, соответствует указанному выше положению локатора в СКО. График, отмеченный тонкой линией, отвечает положению локатора в точке с координатами $\{X_{S\,0}^t=0\,,\ Y_{S\,0}^t=0\,,Z_{S\,0}^t=5\}.$ Расчеты выполнялись по формуле (10), при этом условный центр цели находился на продольной оси ракеты OX^t и отстоял от ее носа на расстоянии 2,78 м. Флуктуации ЭПР ракеты в ближней зоне варьируются в диапазоне от 6 до 15 дБ. В дальней зоне крылья ракеты снижают ее ЭПР на 5 дБ.

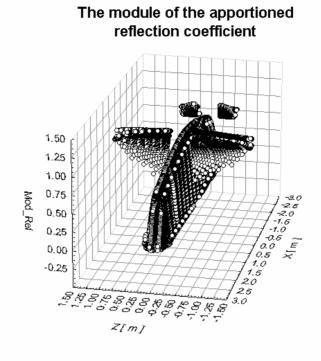


Рис. 18. Модуль удельного коэффициента отражения ракеты на длине волны 3 см

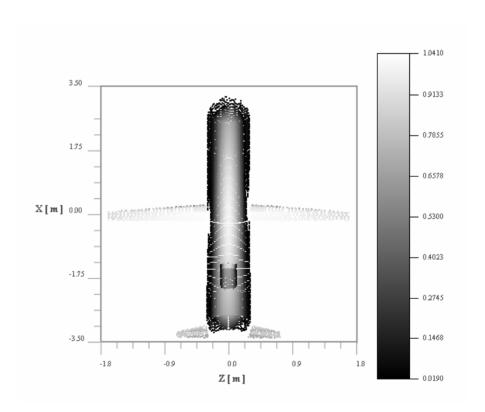


Рис. 19. Распределение модуля удельного коэффициента отражения по поверхности ракеты

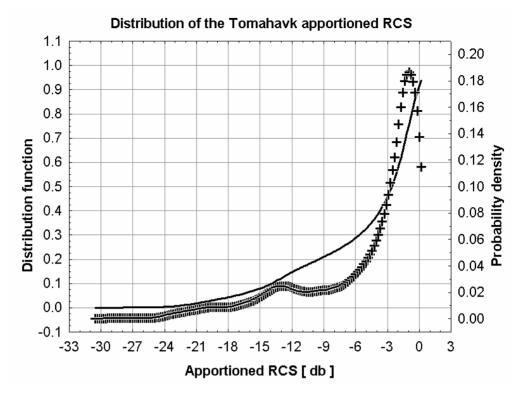


Рис. 20. Распределение модуля удельного коэффициента отражения ракеты на длине волны 3 см

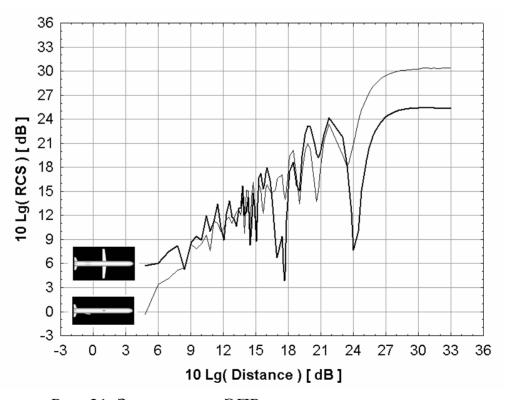


Рис. 21. Зависимости ЭПР ракеты от дальности до локатора на длине волны 3 см

5. РАДИОЛОКАЦИОННЫЕ ПЕРЕХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ 3D- ОБЪЕКТА В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ

Методология цифрового моделирования РЛХ объектов локации, применительно к импульсным условиям их облучения, опирается на одну из важнейших форм описания сигналов, а именно принцип динамического представления. В рамках такого подхода, модулирующую последовательность видеоимпульсов $\mathbf{u}_{v}(t)$, единичной амплитуды, заданной формы и длительности $\mathbf{\tau}_{s}$, рационально представить интегральной суммой

$$u_{v}(t) = \int_{0}^{\tau_{S}} u_{v}^{(1)}(\theta) g(t-\theta) d\theta; \quad u_{v}^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} \{u_{v}(t)\}; \quad u_{v}(0) \equiv 0$$

стандартного сигнала g(t), возникающего в последовательные моменты времени $(t-\theta)$. В качестве стандартного сигнала будем рассматривать функцию включения (функцию Хевисайда): g(t)=0, при t<0; g(t)=1/2, при t=0 и g(t)=1, при t>0. В этом случае, зондирующий радиоимпульс приобретает форму временной развертки

$$u_{s}(t) = u_{v}(t)\cos(\Omega_{s}t) = u_{s}^{(COS)}(t) - u_{s}^{(SIN)}(t)$$

по своим косинусной $u_{s}^{(\cos)}(t)$ и синусной $u_{s}^{(\sin)}(t)$ составляющим

$$u_s^{(\text{COS})}(t) = \int\limits_0^{\tau_S} w_s^{(\text{COS})}(\theta) g_s^{(\text{COS})}(t-\theta) d\theta; \quad u_s^{(\text{SIN})}(t) = \int\limits_0^{\tau_S} w_s^{(\text{SIN})}(\theta) g_s^{(\text{SIN})}(t-\theta) d\theta.$$

Здесь $g_s^{(COS)}(t) = g(t) \cos (\Omega_s t)$ и $g_s^{(SIN)}(t) = g(t) \sin (\Omega_s t)$ - стандартные зондирующие сигналы. Каждый из них представляет собой функцию включения с косинусным или синусным высокочастотным заполнением на длине волны несущего колебания. С другой стороны, линейная свертка весовых (оконных) функций $w_s^{(COS)}(t) = u_v^{(1)}(t) \cos (\Omega_s t)$ и $w_s^{(SIN)}(t) = u_v^{(1)}(t) \sin (\Omega_s t)$ со стандартными сигналами обеспечивает заданную форму и длительность исходного зондирующего радиоимпульса.

В конечном итоге, принцип динамического представления позволяет исследовать реакцию радиолокационной цели на ее облучение стандартными ра-

диоимпульсами $g_s^{(COS)}(t)$ и $g_s^{(SIN)}(t)$ достаточно большой длительности. Пусть периодическая последовательность отраженных радиоимпульсов - суть $g_R^{(COS)}(t-T_{MIN})$ и $g_R^{(SIN)}(t-T_{MIN})$. По смыслу, такого рода сигналы уместно назвать радиолокационными переходными характеристиками (РПХ) 3D- объекта. Важно отметить, что эти характеристики инвариантны к форме и длительности исходных зондирующих импульсов.

Спектральные плотности несущих колебаний $\cos{(\Omega_{\rm S}t)}$ и $\sin{(\Omega_{\rm S}t)}$, как известно, имеет вид:

$$C(\omega) = \pi \delta(\omega - \Omega_{s}) + \pi \delta(\omega + \Omega_{s});$$

$$S(\omega) = \pi \delta(\omega - \Omega_{s}) \exp(-i \pi/2) + \pi \delta(\omega + \Omega_{s}) \exp(i \pi/2).$$

Тогда комплексные спектры соответствующих стандартных зондирующих сигналов $g_s^{(\cos)}(t) = g(t)\cos(\Omega_s t)$ и $g_s^{(\sin)}(t) = g(t)\sin(\Omega_s t)$ не сложно найти по теореме о свертке со спектром $G(\omega) = \pi \delta(\omega) + (i\omega)^{-1}$ функции включения g(t).

$$2G_{s}^{(COS)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\Omega) C(\omega - \Omega) d\Omega = G(\omega - \Omega_{s}) + G(\omega + \Omega_{s});$$

$$2G_{s}^{(SIN)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\Omega)S(\omega - \Omega)d\Omega = G(\omega - \Omega_{s}) exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) + G(\omega + \Omega_{s}) exp\left(i\frac{\pi}{2}\right).$$

В соответствии с формулой (6), умножим полученные спектры на функцию Грина $f_m(\lambda) = \exp\{-ik(R_{Sm} + R_{Rm})\}/(R_{Sm}R_{Rm})$, комплексный коэффициент отражения $\rho_m(\lambda)$, и величину $F_{Sm} \, F_{Rm}/k$ - пропорциональную модулю действующей высоты антенны h_R . В результате, получим спектральные плотности для переходных характеристик $g_{Rm}^{(cos)}(\tau)$ и $g_{Rm}^{(sin)}(\tau)$ m- ого фацета

$$G_{Rm}^{(COS)}(\omega) = \frac{F_{Sm} F_{Rm}}{2k} \rho_{m}(\lambda) f_{m}(\lambda) \left\{ G(\omega - \Omega_{S}) + G(\omega + \Omega_{S}) \right\};$$

$$G_{Rm}^{(SIN)}(\omega) = \frac{F_{Sm} F_{Rm}}{2k} \rho_{m}(\lambda) f_{m}(\lambda) \left\{ G(\omega - \Omega_{S}) \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) + G(\omega + \Omega_{S}) \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \right\},$$

где $\rho_m(\lambda) = k S_m \, \sigma_m(\lambda)$ - для плоскости, квадратичной поверхности или элемента ДВС и $\rho_m(\lambda) = L_m \, \sigma_m(\lambda)$ - для локально линейного сегмента ребра; $\lambda = 2\pi c_0/\omega$ - текущее значение длинны волны.

Обратные преобразования от полученных спектральных функций дают косинусную и синусную РПХ элементарного отражателя объекта локации. В силу известных свойств преобразования Фурье, эти характеристики представляют собой результат применения к стандартным сигналам $g_s^{(COS)}(t)$ и $g_s^{(SIN)}(t)$ определенного набора операций во временной области, проанализированных в разделах 1 и 2. Аналогично формуле (7), оценки обратных преобразований Фурье в случае отражателей первых двух типов (плоских, квадратичных или элементов ДВС) имеют вид:

$$g_{Rm}^{(\cos)}(\tau) = G_{m} \int_{\alpha_{m}}^{\beta_{m}} g(\gamma) \cos(\Omega_{S} \gamma + \vartheta_{Sm}) \delta_{m}(\tau - \gamma) d\gamma \approx G_{m} S_{m} g(\tau) \epsilon_{Rm}^{(\cos)}(\tau); \quad (15)$$

$$g_{Rm}^{(SIN)}(\tau) = G_{m} \int_{\alpha_{m}}^{\beta_{m}} g(\gamma) \sin(\Omega_{S}\gamma + \vartheta_{Sm}) \delta_{m}(\tau - \gamma) d\gamma \approx G_{m} S_{m} g(\tau) \epsilon_{Rm}^{(SIN)}(\tau)$$
 (16)

для локального времени $T_{_R} + \tau_{_m} \geq \tau = t - t_{_m} \geq 0$ и ноль при $\tau < 0$.

$$G_{m} = \frac{F_{S\,m}\,F_{R\,m}}{R_{S\,m}\,R_{R\,m}}\,; \quad \alpha_{m} = \begin{cases} 0 & ,\, 0 \leq \tau < \tau_{m} \\ \tau - \tau_{m} & ,\, \tau_{m} \leq \tau \leq T_{R} + \tau_{m} \end{cases}; \quad \beta_{m} = \begin{cases} \tau & ,\, 0 \leq \tau < T_{R} \\ T_{R} & ,\, T_{R} \leq \tau \leq T_{R} + \tau_{m} \end{cases}.$$

Отражатели третьего типа (сегменты острых кромок), по аналогии с формулой (8), формируют РПХ следующего вида:

$$g_{Rm}^{(COS)}(\tau) \approx -c_{0} G_{m} L_{m} |\sigma_{m}(\lambda_{S})| \int_{\tau-\tau_{m}}^{\tau} g(\gamma) sin(\Omega_{S}\gamma + \vartheta_{Sm}) d\gamma;$$

$$g_{R\,m}^{\,(SIN)}(\tau) \!\approx \! - c_{_{0}}\,G_{_{m}}\,L_{_{m}} \! \left| \, \sigma_{_{m}}(\lambda_{_{S}}) \right| \! \int\limits_{\tau-\tau_{_{m}}}^{\tau} \! g(\gamma) \cos\left(\! \Omega_{_{S}} \gamma + \vartheta_{_{S\,m}}\right) \! d\gamma. \label{eq:gradient}$$

Последующее интегрирование дает

$$g_{Rm}^{(COS)}(\tau) \approx -2G_{m}L_{m}^{2}\frac{\sin\phi_{m}}{\phi_{m}}g(\tau)\left\{\epsilon_{Rm}^{(SIN)}(\tau)\cos\phi_{m} - \epsilon_{Rm}^{(COS)}(\tau)\sin\phi_{m}\right\}; \quad (17)$$

$$g_{Rm}^{(SIN)}(\tau) \approx 2G_{m} L_{m}^{2} \frac{\sin \phi_{m}}{\phi_{m}} g(\tau) \left\{ \epsilon_{Rm}^{(COS)}(\tau) \cos \phi_{m} + \epsilon_{Rm}^{(SIN)}(\tau) \sin \phi_{m} \right\}$$
(18)

для локального времени $\tau = t - t_m \ge 0$ и ноль в противном случае. Формулы (15) – (18) наглядно показывают, что переходные характеристики элементарного отражателя формируются в результате следующих преобразований во временной области стандартных сигналов g(t) cos $(\Omega_s t)$ и g(t) sin $(\Omega_s t)$:

- запаздывания на временной интервал t_m ;
- фазового смещения несущих колебаний на угол $\vartheta_{_{\mathrm{S}\,\mathrm{m}}}$;
- дополнительного фазового смещения несущих колебаний на угол ϕ_m для сегмента ребра;
- линейного преобразования с коэффициентом $G_m S_m |\sigma_m(\lambda_s)|$ для плоскости, квадратичной поверхности или сегмента ДВС;
- линейного преобразования с коэффициентом $\left(G_m L_m^2 \mid \sigma_m(\lambda_S) \mid \sin \phi_m\right)\!\!/\phi_m$ для сегмента ребра.

Переходные характеристики цели получим в результате когерентного суммирования переходных характеристик регулярных и сингулярных типов элементарных отражателей

$$g_{\,\,\mathrm{R}}^{\,\,\mathrm{(COS)}}\!\left(\,t-T_{\,\,\mathrm{MIN}}\right) = \sum_{m} \,g_{\,\,\mathrm{R}\,\,m}^{\,\,\mathrm{(COS)}}\!\left(\,t-t_{\,\,\mathrm{m}}\right) \hspace{0.5cm} \boldsymbol{\varkappa} \hspace{0.5cm} g_{\,\,\mathrm{R}}^{\,\,(\mathrm{SIN})}\!\left(\,t-T_{\,\,\mathrm{MIN}}\right) = \sum_{m} \,g_{\,\,\mathrm{R}\,\,m}^{\,\,(\mathrm{SIN})}\!\left(\,t-t_{\,\,\mathrm{m}}\right). \label{eq:gradient}$$

После подстановки выражений (15) – (18) для РПХ m – ого фацета в последние формулы получим

$$g_{R}^{(COS)}(t-T_{MIN}) = \sum_{m=1}^{M_{S}} \Delta_{m}^{(S)} c_{Rm}(\tau) - 2\sum_{m=1}^{M_{L}} \Delta_{m}^{(L)} \{s_{Rm}(\tau) \cos \varphi_{m} - c_{Rm}(\tau) \sin \varphi_{m}\}; \quad (19)$$

$$g_{R}^{(SIN)}(t-T_{MIN}) = \sum_{m=1}^{M_{S}} \Delta_{m}^{(S)} s_{Rm}(\tau) + 2 \sum_{m=1}^{M_{L}} \Delta_{m}^{(L)} \{c_{Rm}(\tau) \cos \varphi_{m} + s_{Rm}(\tau) \sin \varphi_{m}\}, \quad (20)$$

где $c_{R\,m}(\tau) = g(\tau) \epsilon_{R\,m}^{(COS)}(\tau)$ и $s_{R\,m}(\tau) = g(\tau) \epsilon_{R\,m}^{(SIN)}(\tau)$ - уместно назвать удельными РПХ фацета; $\tau = t - t_m$ - локальное время. Соответствующие характеристические функции принимают значения $\Delta_m^{(S)} = G_m \, S_m$ и $\Delta_m^{(L)} = G_m \, L_m^2 \sin \phi_m / \phi_m$, если регулярные и сингулярные отражатели облучаются и наблюдаются при те-

кущем положении антенной системы локатора в СКО, и ноль – в противном случае.

Весьма информативным является отображение переходных характеристик цели на плоскости комплексного сигнала $z_R(\tau) = g_R^{(COS)}(\tau) + i g_R^{(SIN)}(\tau)$ в виде фазовой траектории. Это аналог аналитического сигнала [22]. Полярные координаты текущей точки такого рода аттрактора являются аналогами мгновенных огибающей и фазы сигнала $g_R^{(COS)}(\tau)$

$$A_{R}^{2}(\tau) = \left\{ g_{R}^{(COS)}(\tau) \right\}^{2} + \left\{ g_{R}^{(SIN)}(\tau) \right\}^{2}; \ \vartheta_{R}(\tau) = j\pi + Arctg \frac{g_{R}^{(SIN)}(\tau)}{g_{R}^{(COS)}(\tau)} = \Omega_{S}\tau + \xi_{R}(\tau), (21)$$

где $\tau = t - T_{\text{MIN}}$ - локальное время; $\xi_{\text{R}}(\tau)$ - нелинейная составляющая мгновенной накопленной фазы объекта локации. Топология фазовой траектории может служить хорошей основой для формирования признакового пространства в задачах распознавания и классификации целей.

Ясно также, что в соответствии с принципом суперпозиции линейная свертка РПХ с весовыми функциями $w_s^{(COS)}(t)$ и $w_s^{(SIN)}(t)$ дает временную развертку отраженного сигнала

$$u_{R}(t) = U\left\{u_{R}^{(COS)}(t - T_{MIN}) - u_{R}^{(SIN)}(t - T_{MIN})\right\}$$
(22)

по его косинусной $u_R^{(COS)}(\tau)$ и синусной $u_R^{(SIN)}(\tau)$ составляющим. В силу двустороннего ограничения весовых функций $w_S^{(COS)}(\tau) = w_S^{(SIN)}(\tau) \equiv 0$ для значений $\tau \not\in [0,\tau_S]$ и одностороннего ограничения переходных характеристик $g_R^{(COS)}(\tau) = g_R^{(SIN)}(\tau) \equiv 0$ для значений $\tau < 0$, получим

$$u_{R}^{(COS)}(\tau) = \int\limits_{\tau_{MIN}}^{\tau_{MAX}} w_{S}^{(COS)}(\tau - \theta) g_{R}^{(COS)}(\theta) d\theta; \quad u_{R}^{(SIN)}(\tau) = \int\limits_{\tau_{MIN}}^{\tau_{MAX}} w_{S}^{(SIN)}(\tau - \theta) g_{R}^{(SIN)}(\theta) d\theta$$

для локального времени $0 \le \tau \le T_{_R} + \tau_{_S}$ и ноль в противном случае.

Важно отметить, что операция дифференцирования применяется лишь к зондирующему видеоимпульсу на этапе формирования весовых функций $w_s^{(\cos)}(t) = u_v^{(1)}(t) \cos\left(\Omega_s t\right)$ и $w_s^{(\sin)}(t) = u_v^{(1)}(t) \sin\left(\Omega_s t\right)$. Это существенное

достоинство РПХ позволяет исследовать фрактальные свойства радиолокационных целей [24].

6. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКПЕРИМЕНТ 2

В соответствии с представленной методикой проводилось имитационное цифровое моделирование РПХ сферы радиусом 1 метр и аэродинамических объектов — крылатой ракеты Тотаhavk, самолета F-16 и вертолета АН-64 (Арасhe) на длине волны несущего колебания $\lambda_s=0$, 03 метра. Расчеты проводились по формулам (19) и (20) для случая идеальной проводимости целей и согласованной вертикальной поляризации изотропных передающей и приемной антенн локатора ($F_{sm}=F_{Rm}\equiv 1$). Расстояние от условного центра объекта до локатора во всех случаях составляло 5 метров.

Результаты расчета косинусной $g_R^{(COS)}(\tau)$ и синусной $g_R^{(SIN)}(\tau)$ РПХ сферы, а также ее фазовый портрет на плоскости комплексного сигнала $z_R(\tau) = g_R^{(COS)}(\tau) + i g_R^{(SIN)}(\tau)$ представлены на **рис.** 22 – 24. Мгновенные модуль $A_R(\tau)$ и фазу $\vartheta_R(\tau)$ этого сигнала иллюстрируют **рис.** 25 и 26. На последнем рисунке приведена, также, нелинейная составляющая $\xi_R(\tau) = \vartheta_R(\tau) - \Omega_S \tau$ мгновенной накопленной фазы. Оценки трендов (полученные с помощью модели Lowess) обеих характеристик $A_R(\tau)$ и $\xi_R(\tau)$ являются практически горизонтальными.

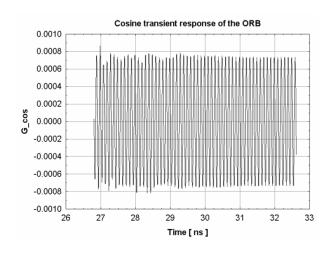


Рис. 22. Косинусная РПХ сферы на длине волны 3 см

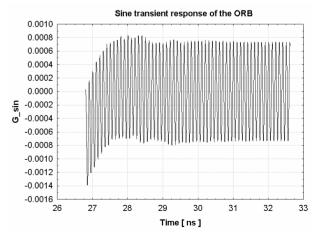


Рис. 23. Синусная РПХ сферы на длине волны 3 см

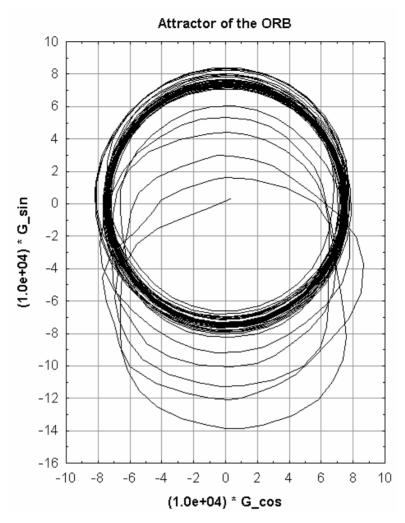


Рис. 24. Фазовый портрет сферы на длине волны 3 см

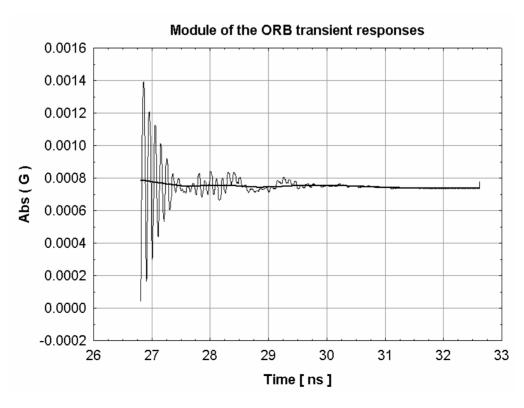


Рис. 25. Модуль комплексного сигнала сферы на длине волны 3 см

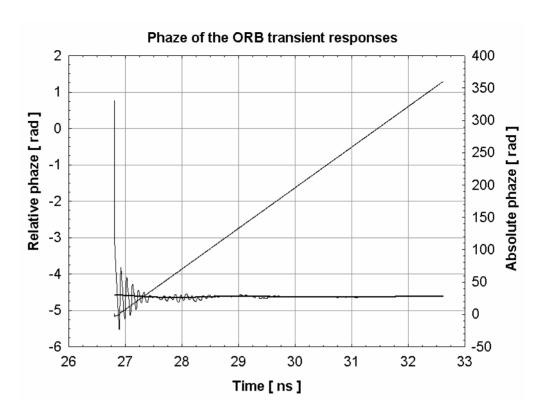


Рис. 26. Фаза комплексного сигнала сферы на длине волны 3 см

Последующие расчеты проводились для положения локатора в точке с координатами $\left\{X_{so}^t=0\,,\,Y_{so}^t=-5\,,Z_{so}^t=0\,\right\}$ в СКО. Условные центры самолета и вертолета находились на продольной оси ОХ t и отстояли от их носовых частей на расстояния 7,75 м и 7,188 м соответственно. На рисунках 27-32 представлены мгновенные модули и фазы комплексных сигналов триады целей: крылатой ракеты, самолета и вертолета. Все сигналы имеют, по крайней мере, три структурные составляющие. Это тренды (отмеченные на рисунках толстыми линиями) и высокочастотные колебания. Тренды и огибающие колебаний содержат, в свою очередь, резкие перепады локального уровня. Отчетливо видны различия в амплитудных и временных параметрах этих структурных составляющих РПХ 3D- объектов, что позволяет надежно распознавать их с указанного ракурса.

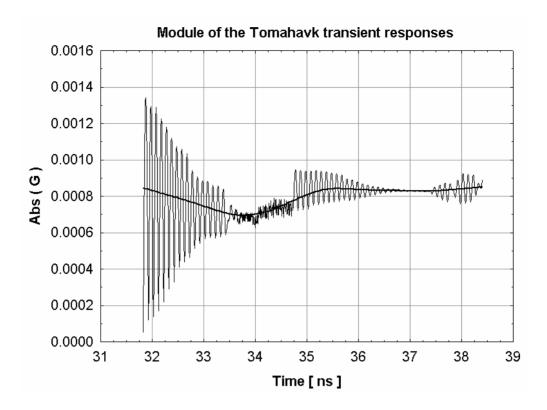


Рис. 27. Модуль комплексного сигнала ракеты Tomahavk на длине волны 3 см

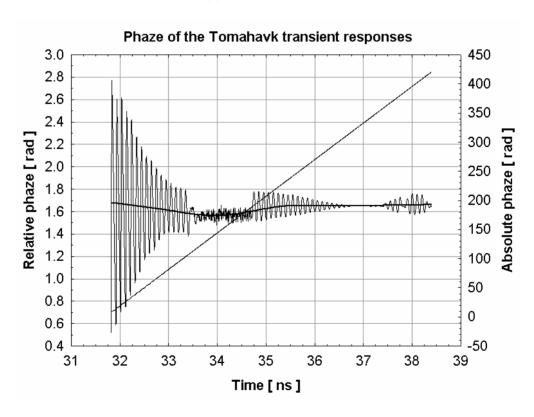


Рис. 28. Фаза комплексного сигнала ракеты Tomahavk на длине волны 3 см

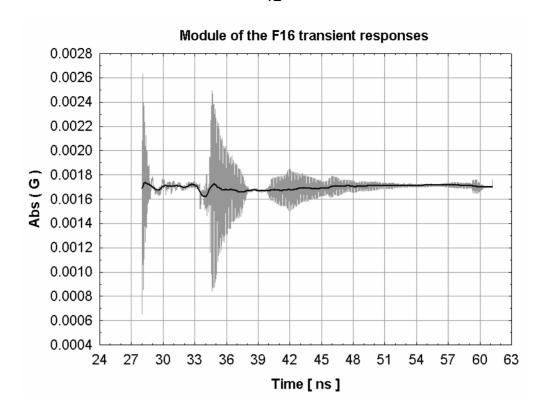


Рис. 29. Модуль комплексного сигнала самолета F16 на длине волны 3 см

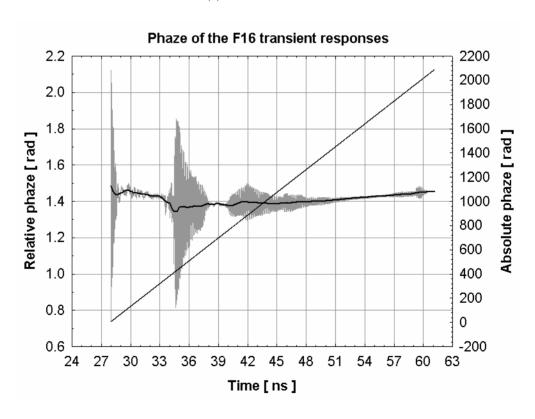


Рис. 30. Фаза комплексного сигнала самолета F16 на длине волны 3 см

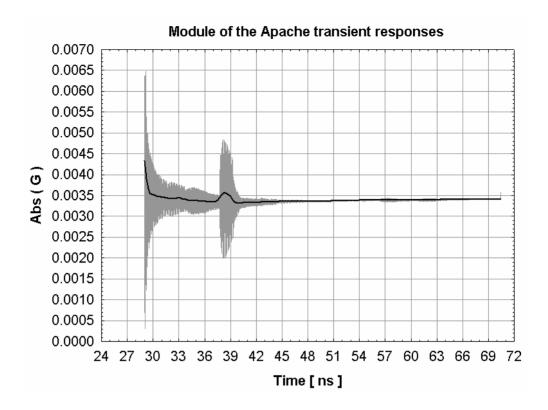


Рис. 31. Модуль комплексного сигнала вертолета Apache на длине волны 3 см

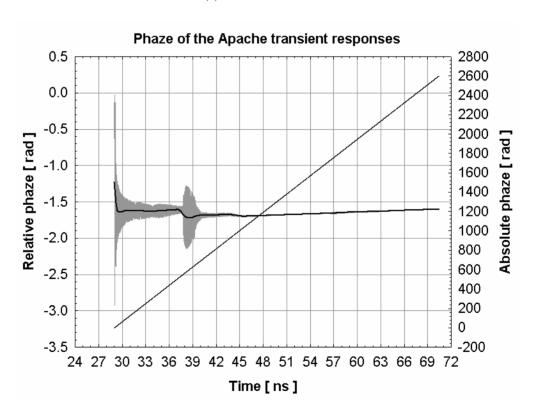


Рис. 32. Фаза комплексного сигнала вертолета Apache на длине волны 3 см

7. НОРМИРОВАННЫЕ РАДИОЛОКАЦИОННЫЕ ПЕРЕХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ 3D- ОБЪЕКТА

Будем облучать объект локации стандартными сигналами $g_s^{(cos)}(t)$ и $g_s^{(sin)}(t)$ достаточно большой длительности τ_s . Тогда спектры сигналов, отраженных его m- м фацетом в апертуру приемной антенны - суть $E_{Rm}(\lambda)G_s^{(cos)}(\omega)$ и $E_{Rm}(\lambda)G_s^{(sin)}(\omega)$. Для этого случая введем новые определения косинусного и синусного нормированных частотных коэффициентов отражения радиолокационной цели

$$G_{N}^{(COS)}(\lambda) = 2\sqrt{\pi} \sum_{m} R_{Sm} \frac{E_{Rm}(\lambda)}{|E_{Sm}|} G_{S}^{(COS)}(\omega);$$

$$G_{N}^{(SIN)}(\lambda) = 2\sqrt{\pi} \sum_{m} R_{Sm} \frac{E_{Rm}(\lambda)}{|E_{Sm}|} G_{S}^{(SIN)}(\omega).$$

Как и ранее, реализовано скользящее масштабирование на величину $E_{\rm Sm}$ комплексной огибающей напряженности поля облучения вблизи каждого элементарного отражателя. Подстановка выражений (1) и (3) в последние равенства, приводит к соотношениям

$$G_{N}^{(COS)}(\lambda) = 2\sqrt{\pi} \sum_{m} G_{S}^{(COS)}(\omega) \frac{R_{Sm}}{R_{Rm}} \rho_{m}(\lambda) \exp\{-ik(R_{Sm} + R_{Rm})\};$$

$$G_{N}^{(SIN)}(\lambda) = 2\sqrt{\pi} \sum_{m} G_{S}^{(SIN)}(\omega) \frac{R_{Sm}}{R_{Rm}} \rho_{m}(\lambda) \exp\left\{-ik\left(R_{Sm} + R_{Rm}\right)\right\}.$$

Важно отметить, что необходимость последующего учета различных доплеровских сдвигов частот для фацетов, распределенных по поверхности цели, не позволяет вынести спектры стандартных сигналов за знак суммирования в ближней зоне. Обратные преобразования Фурье от полученных спектральных функций дают косинусную и синусную нормированные РПХ объекта локации

$$g_{N}^{(COS)}(t-T_{MIN}) = \sum_{m} \frac{R_{Sm}}{R_{Rm}} g_{Nm}^{(COS)}(\tau); \quad g_{N}^{(SIN)}(t-T_{MIN}) = \sum_{m} \frac{R_{Sm}}{R_{Rm}} g_{Nm}^{(SIN)}(\tau). \quad (23)$$

Ясно, что эти РЛХ измеряются в метрах. Здесь $\tau = t - t_{\rm m}$ - локальное время, а $g_{\rm N\,m}^{\rm (COS)}(\tau)$ и $g_{\rm N\,m}^{\rm (SIN)}(\tau)$ - нормированные РПХ m – ого фацета

$$g_{Nm}^{(\cos)}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{S}^{(\cos)}(\omega) \rho_{m}(\lambda) \exp\{i\omega\tau\} d\omega = \int_{\alpha_{m}}^{\beta_{m}} g_{S}^{(\cos)}(\tau - \theta) h_{m}(\theta) d\theta; \quad (24)$$

$$g_{Nm}^{(SIN)}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{S}^{(SIN)}(\omega) \rho_{m}(\lambda) \exp\{i\omega\tau\} d\omega = \int_{\alpha_{m}}^{\beta_{m}} g_{S}^{(SIN)}(\tau - \theta) h_{m}(\theta) d\theta. \quad (25)$$

Вычисление обратных преобразований Фурье (24) и (25) в соответствии с выражениями для стандартных спектров $G_s^{(cos)}(\omega)$ и $G_s^{(sin)}(\omega)$, с учетом свойств их симметрии, а также свойств симметрии комплексного коэффициента отражения $\rho_m(\lambda)$ m- ого фацета, дает

$$g_{N\,m}^{\,(COS)}(\tau)\sqrt{\pi} = \pi\,\Big|\,\rho_{m}\Big(\lambda_{S}\Big)\Big|cos\,\Big\{\Omega_{S}\tau + \vartheta_{m}\Big(\lambda_{S}\Big)\Big\} + \int\limits_{\Omega_{S}-\Delta\Omega_{S}}^{\Omega_{S}+\Delta\Omega_{S}}\frac{\big|\,\rho_{m}(\lambda)\big|}{\omega - \Omega_{S}}sin\big\{\omega\tau + \vartheta_{m}(\lambda)\big\}d\omega;$$

$$g_{N\,m}^{\,(SIN)}(\tau)\sqrt{\pi} = \pi\,\Big|\,\,\rho_{m}\Big(\!\lambda_{\,S}\Big)\Big|\sin\Big\{\!\Omega_{\,S}\tau + \vartheta_{m}\Big(\!\lambda_{\,S}\Big)\!\Big\} + \int\limits_{\Omega_{\,S}-\Delta\Omega_{\,S}}^{\Omega_{\,S}+\Delta\Omega_{\,S}}\frac{\Big|\,\rho_{m}(\lambda)\,\Big|}{\omega - \Omega_{\,S}}\cos\big\{\omega\tau + \vartheta_{m}(\lambda)\big\}d\omega.$$

Положим, что в достаточно узкой полосе частот $\Delta\Omega_s \sim \tau_s^{-1}$ спектральных плотностей $G_s^{(cos)}(\omega)$ и $G_s^{(sin)}(\omega)$ стандартных зондирующих сигналов комплексный спектр коэффициента отражения фацетов практически не изменяется по сравнению с его значением на длине волны несущего колебания $\rho_m(\lambda) = \rho_m(\lambda_s)$, $(m=1,2,\mathbf{K},M)$. Это упрощающее допущение позволяет получить следующие оценки нормированных РПХ элементарного отражателя

$$g_{Nm}^{(COS)}(\tau) = 2\sqrt{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \rho_{m}(\lambda_{s}) \right\} j_{s}^{(COS)}(\tau) - 2\sqrt{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \rho_{m}(\lambda_{s}) \right\} j_{s}^{(SIN)}(\tau);$$

$$g_{Nm}^{(SIN)}(\tau) = 2\sqrt{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \rho_{m}(\lambda_{s}) \right\} j_{s}^{(SIN)}(\tau) + 2\sqrt{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \rho_{m}(\lambda_{s}) \right\} j_{s}^{(COS)}(\tau).$$

Здесь $j_s^{(\cos)}(\tau) = j_s(\tau)\cos\left(\Omega_s\tau\right)$ и $j_s^{(\sin)}(\tau) = j_s(\tau)\sin\left(\Omega_s\tau\right)$ - стандартные радио-импульсы; $j_s(\tau) = 0.5 + \int_0^{\tau\Delta\Omega_s} \sin c(\phi) d\phi/\pi$ - видеосигнал с полосой спектра $\Delta\Omega_s \sim \tau_s^{-1}$. Известно [25, с. 419], что сигнал $j_s(\tau)$ аппроксимирует функцию

включения, причем, по мере уменьшения длительности импульса $\tau_{_S}$, $\lim_{\Delta\Omega_{_S\to\infty}} \! \big\{ j_{_S}(\tau) \big\} \! = \! g(\tau).$

При необходимости эффект Доплера может быть учтен изменением частоты несущего колебания Ω_s стандартных сигналов $j_s^{(\cos)}(t)$ и $j_s^{(\sin)}(t)$ на величину доплеровского сдвига для каждого фацета. Кроме того, значения действительной и мнимой частей коэффициента отражения фацета также должны быть вычислены с учетом доплеровского сдвига.

Расширим временной интервал $[0, \tau_m]$ определения импульсной характеристики $h_m(\tau)$ каждого фацета, дополнив ее нулями в интервале $[\tau_m, T_R]$. Это преобразование позволяет заменить пределы интегрирования в формулах (24) и (25) значениями

$$\gamma_{\text{MIN}} = \begin{cases} 0 & , 0 \leq \tau < T_{\text{R}} \\ \tau - T_{\text{R}} & , T_{\text{R}} \leq \tau \leq 2T_{\text{R}} \end{cases} \quad \text{if} \quad \gamma_{\text{MAX}} = \begin{cases} \tau & , 0 \leq \tau < T_{\text{R}} \\ T_{\text{R}} & , T_{\text{R}} \leq \tau \leq 2T_{\text{R}} \end{cases}.$$

Последующее сопоставление выражений (23) – (25) с формулой (14) и изменение порядка суммирования и интегрирования показывает, что переходные и импульсные характеристики цели связаны соотношениями линейной свертки

$$g_{N}^{(COS)}(\tau) = \int_{\gamma_{MIN}}^{\gamma_{MAX}} g_{S}^{(COS)}(\tau - \theta) h_{N}(\theta) d\theta; \quad g_{N}^{(SIN)}(\tau) = \int_{\gamma_{MIN}}^{\gamma_{MAX}} g_{S}^{(SIN)}(\tau - \theta) h_{N}(\theta) d\theta, \quad (26)$$

где $\tau = t - T_{\text{MIN}}$ - локальное время для отраженных сигналов. Ясно, что РПХ необходимо рассчитывать во временном интервале $[0\,,\,2T_{_{\rm R}}\,]$. Еще раз отметим, что соотношения (26) не учитывают эффект Доплера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе сформулирована и практически реализована в виде расчетных формул методология имитационного цифрового моделирования радиолокационного портрета 3D- объекта в ближней зоне. Рациональной формой представления портрета является распределение действительной и мнимой частей удельных коэффициентов отражения фацетов по поверхности цели и спектру

зондирующего излучения. Эта характеристика является надежной информационной основой для решения основных задач синтеза и анализа функционирования радиолокационных устройств. В частности, параметрическое описание временной последовательности портретов в процессе пролета локатора вблизи 3D- объекта позволяет создавать эффективные модели входных сигналов для комплексов полунатурного моделирования, функционирующих в режиме реального времени. В ходе вычислительных экспериментов продемонстрирована интерпретируемость визуального восприятия радиолокационных портретов различных целей.

В отличие от общепринятого определения введено понятие нормированного частотного коэффициента отражения 3D- объекта. Введенное определение инвариантно к выбору условного центра цели, что имеет существенное значение на малых дальностях. Показано, что в ближней зоне спектральная зависимость ЭПР - суть спектральная плотность энергии частотного коэффициента отражения. Его обратное преобразование Фурье позволило получить расчетные формулы для нормированной импульсной характеристики 3D- объекта. Обоснована рациональность ее представления во временной области в виде когерентной суммы сопряженных по Гильберту квадратурных импульсных характеристик фацетов цели. Такого рода модель определяет понятие временного профиля импульсной ЭПР 3D- объекта применительно к радиолокационному диапазону спектра электромагнитных волн.

Опираясь на принцип динамического представления сигналов, введены принципиально новые понятия косинусной и синусной радиолокационных переходных характеристик 3D- объекта. Эти характеристики инвариантны к выбору формы и длительности зондирующих радиоимпульсов. Переходные характеристики цели описаны в виде когерентной суммы удельных переходных характеристик ее фацетов. В ходе вычислительных экспериментов показано, что информативным, с точки зрения задач распознавания и классификации 3D-объектов по их размерам и форме, является структурный анализ мгновенных

модуля и фазы комплексного сигнала. Действительная и мнимая части этого сигнала – суть косинусная и синусная переходные характеристики цели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Юсеф Н. Н. Эффективная площадь отражения сложных радиолокационных целей // ТИИЭР. 1989. Т. 77, № 5. С. 100 112.
- Shyh-Kang Jeng. Near-Field Scattering by Physical Theory of Diffraction and Shooting and Bouncing Rays // IEEE Transactions on Antennas and Propagation.
 1998. - V. 46, № 4, P. 551 - 558.
- 3. Saez de Adana F., Gonzales I., Gutierrez O., Lozano P, Catedra M. F. Method Based on Physical Optics for the Computation of the Radar Cross Section Including Diffraction and Double Effects of Metallic and Absorbing Bodies Modeled With Parametric Surfaces // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2004. V. 52, № 12, P. 3295 3303.
- 4. Борзов А. Б., Соколов А. В., Сучков В. Б. Цифровое моделирование входных сигналов систем ближней радиолокации от сложных радиолокационных сцен // Успехи современной радиоэлектроники. № 9 10. 2004. С. 38 62.
- 5. Тафлов А., Умашанкар К. Р. Численное моделирование рассеяния электромагнитных волн и вычисление эффективной площади отражения целей конечно-разностным методом во временной области // ТИИЭР. 1989. Т. 77, № 5. С. 57 75.
- 6. Taflov A. Advances in Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain method. New York: Artech House. 2000.
- 7. Jian-Ying Li, Le-Wei Li, Tat-Soon Yeo, Yeow-Beng Gan. Radar Cross Sections of Aircraft F117: Computation Using Fast Multipole Method and Measurement Using Compact Range. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2002. V...- № . P. -.
- 8. Volakis J., Chatterjee A., Kempel L. Finite Element Method for Electromagnetics.- Piscataway. NJ, IEEE Press. 1998.

- 9. Лабунец Л. В. Математическое и физическое моделирование переходных характеристик 3D- объектов в однопозиционной системе оптической локации // Радиотехника и электроника. 2002.- Т. 47. № 3. С. 308-321.
- 10. Анищенко Н. Н., Лабунец Л. В. Цифровое моделирование и обработка переходных характеристик объектов в оптической локационной системе наведения // Электромагнитные волны и электронные системы. 2002. Т. 7. № 8.- С. 60 77.
- 11. Штагер Е. А. Рассеяние радиоволн на телах сложной формы. М.: Радио и связь. 1986.- 184с.
- 12. Радиолокационные характеристики летательных аппаратов / М. Е. Варганов, Ю. С. Зиновьев, Л. Ю. Астанин, А. А. Костылев и др.; Под ред. Л. Т. Тучкова. М.: Радио и связь, 1985. 236 с.
- 13. Лабунец Л. В. Теория и методы цифрового моделирования полей целей и сигналов в оптических и радиолокационных автономных информационных системах. Докт. дис. М: МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2002. 333 с.
- 14. Gordon W. B. Far-Field Approximations to the Kirchhoff Helmhotz Representations of Scattered Fields. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1975. V. AP-23. № 5. P. 864 866.
- 15. Ling H., Chou R. C., Lee S. W. Shooting and bouncing rays: Calculating the RCS of an arbitrarily shaped cavity. // IEEE Transactions Antennas and Propagation. 1989. V. 37. Feb. P. 194 205.
- 16. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Советское радио. 1962. 243 с.
- 17. Michaeli A. Equivalent Edge Currents for Arbitrary Aspects of Observation. // IEEE Transactions Antennas and Propagation. 1989. V. AP-32. Mar. P. 252 258.
- 18. Злобин С. Л., Осипов М. Л., Скосырев В. Н. Оценка эффективной поверхности рассеяния шара и эллипсоида вращения при сверхкороткоимпульсной радиолокации. // Радиотехника. 1999. № 12. С. 3 9.

- 19. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Радио и связь. 1982.- 624 с.
- 20. Zorin D., Schroder P., Sweldens W. Interpolation Subdivision for Meshes with Arbitrary Topology. // Proceedings of the 23 Annual Conference on Computer Graphics (SIGGRAPH'96). New Orlean, LA USA. 1996. August 4 9. P. 189 192.
- 21. Daubechies I., Guskov I., Schroder P., Sweldens W. Wavelets on Irregular Point Sets. // Philadelphia Transactions Royal Society. London A. 1999. № 13. P. 1 16.
- 22. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных / Пер с англ. под ред. И. Н. Коваленко. М: Мир. 1989. 540 с.
- 23. Лаговский Б. А. Многопараметрическая оптимизация характеристик неоднородных покрытий и определение их эффективных параметров. Докт. дис. М: МИРЭА. 2005. 298 с.
- 24. Потапов А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос. 2002. 664 с.
- 25. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. перераб. М: Физматгиз. 1963. 1100 с.