

УДК 621.376.3

**Обобщенная статистическая модель характеристик заметности целей
в одно- и двухпозиционных локационных системах.**

Л. В. Лабунец

Предложена унифицированная статистическая модель характеристик заметности целей в локационных системах. Ее основой является процедура нелинейного преобразования формирующего бета- распределения. Представлена методика оптимизации параметров модели на основе статистической обработки результатов имитационного цифрового моделирования ЭПР объекта в однопозиционной системе оптической локации. Проиллюстрирована универсальность и гибкость предложенной системы распределений на примере статистической модели реального времени интегральных параметров импульсной ЭПР объекта.

The universal statistical model of the target cross section in radar systems is offered. The nonlinear transformation procedure of a generated beta- distribution is its basis. The optimization technique of a model parameters is represented on the basis of statistical processing of the target RCS obtained by the simulation digital modeling methods in the active optical radar system. The universality and flexibility of the offered distributions system is illustrated on the example of a real time statistical model for integral parameters of the target impulse RCS.

Введение. Практические задачи анализа функционирования оптико-электронных систем различного назначения приводят к необходимости построения цифровых моделей входных сигналов локационных систем, обеспечивающих проведение вычислительного эксперимента в режиме реального времени. Надежной методической основой для решения этой проблемы является исследование статистических свойств характеристик заметности целей, таких как, эффективная площадь рассеяния (ЭПР) и интегральный коэффициент яркости (ИКЯ) объекта применительно к условиям соответственно дальней и

ближней зоны. Обширный статистический материал относительно ЭПР и ИКЯ целей, получаемый методами математического и физического моделирования, позволяет, в свою очередь, обосновывать структуру и оптимизировать параметры унифицированных статистических моделей указанных характеристик заметности. К числу последних относится статистическая модель ЭПР, представленная в работе [1]. Однако применение гамма-распределения в качестве основы модели противоречит физическому смыслу ЭПР, поскольку последняя варьируется в конечном интервале. Кроме того, наш опыт цифрового моделирования ЭПР и ИКЯ для широкого класса космических, воздушных и наземных антропогенных объектов показал, что соответствующие законы близки к классу бета-распределений. Важно отметить, что данная закономерность в поведении статистик ЭПР проявляется не только в оптическом, но и в радиолокационном диапазоне спектра электромагнитных волн. Разработке унифицированной статистической модели ЭПР и ИКЯ объектов, опирающейся на результаты имитационного цифрового моделирования сигналов в системах оптической локации, посвящена данная работа.

Система непрерывных распределений. В практических приложениях гистограммные оценки распределений ЭПР $A(\alpha, \beta)$ и размера цели $T(\alpha, \beta)$ в однопозиционной локации [2, 3], равно как и аналогичные оценки ИКЯ в двухпозиционной локации, не всегда удобны. Рассмотрим простую систему непрерывных распределений, аппроксимирующих одномерные законы указанных характеристик отражения зондирующего излучения объектом локации. Пусть $v = \varphi(u)$ - дифференцируемая, монотонно возрастающая функция нормированной ЭПР цели $u = (a - A_{\min}) / (A_{\max} - A_{\min})$, распределённая в интервале $0 \leq v \leq 1$ в соответствии с некоторым стандартным законом $F_B(v)$. Здесь $A_{\min} \leq A(\alpha, \beta) \leq A_{\max}$ - интервал изменения ЭПР объекта. Тогда функция распределения (ФР) ЭПР $F_A(a)$ удовлетворяет правилу нелинейного безынерционного преобразования [4] а именно $F_A(a) = F_B\{\varphi[(a - A_{\min}) / (A_{\max} - A_{\min})]\}$.

Иными словами функция $v = \varphi[(a - A_{\min}) / (A_{\max} - A_{\min})]$ преобразует стандартное распределение в распределение ЭПР цели. Заменяем функцию $F_A(a)$ её кусочно-линейной интерполяционной оценкой, полученной на основе гистограммы распределения ЭПР [3]. В этом случае решение численными методами трансцендентного уравнения $F_B(v) = F_A(u)$ относительно v (для каждого фиксированного u) даст интерполяционное приближение функции $v = \varphi(u)$. Здесь функция распределения нормированной ЭПР имеет вид

$$F_A(u) = F_A\{A_{\min} + u(A_{\max} - A_{\min})\} = \sum_{m=1}^M P_m \Delta(u | u_m, u_{m+1}), \quad (1)$$

$$\text{где } u_m = \frac{a_m - A_{\min}}{A_{\max} - A_{\min}}; \Delta(u | u_m, u_{m+1}) = \begin{cases} 0 & \text{при } u < u_m, \\ (u - u_m) / (u_{m+1} - u_m) & \text{при } u_m \leq u < u_{m+1}, \\ 1 & \text{при } u \geq u_{m+1}; \end{cases}$$

$a_m \leq a < a_{m+1}$ - m -ый разрядный интервала гистограммы ЭПР [3].

Расчеты коэффициентов асимметрии γ_{3A} и эксцесса γ_{4A} распределений ЭПР и размеров цели для разнообразных по конфигурации космических, воздушных и наземных объектов локации обнаружили устойчивую тенденцию в поведении параметров Пирсона $\beta_1 = \gamma_{3A}^2$ и $\beta_2 = \gamma_{4A} + 3$. Эти статистики удовлетворяют неравенствам $\beta_1 + 1 \leq \beta_2 \leq 6 + 3\beta_1/2$. Поэтому в качестве формирующего разумно выбрать бета - распределение

$$F_B(v) = \frac{\Gamma(g_1 + g_2 + 2)}{\Gamma(g_1 + 1)\Gamma(g_2 + 1)} \int_0^v x^{g_1} (1-x)^{g_2} dx; \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (2)$$

Показатели степени $g_1 > -1$ и $g_2 > -1$ формирующего бета - распределения целесообразно оптимизировать по критерию минимума абсолютной невязки распределений (1) и (2) с помощью метода деформируемого многогранника Нелдера - Мида [5]. Начальные приближения параметров g_1 и g_2 в процедуре поиска экстремума удобно рассчитывать методом моментов [4]

$$g_1 = \frac{b_1 - A_{\min} + m_A}{b_2(A_{\max} - A_{\min})}; \quad g_2 = \frac{A_{\max} - m_A - b_1}{b_2(A_{\max} - A_{\min})}; \quad (3)$$

$$b_1 = -\frac{\sigma_A(\beta_2 + 3)\sqrt{\beta_1}}{10\beta_2 - 12\beta_1 - 18}; \quad b_2 = -\frac{2\beta_2 - 3\beta_1 - 6}{10\beta_2 - 12\beta_1 - 18}.$$

Расчетные значения статистик ЭПР некоторых аэродинамических объектов локации и параметры формирующего бета - распределения представлены в **таблице 1**.

Таблица 1. Статистики ЭПР аэродинамических объектов.

Объект	ALCM	СУ-7Б	МИ-4	МИГ-17	
$A_{\lambda 0}$	0,93	0,72	0,42	1,0	1,0
k_B	21,03	0,2165	0,5224	0,0805	7,1825
k_D	0,8762	0,6988	0,2595	0,8589	0,8314
k_R	0,0097	0,0677	0,1663	1,036	0,0313
$m_A [M^2]$	1,64	16,68	3,42	12,02	14,7
$\sigma_A [M^2]$	2,48	10,36	2,94	7,18	13,8
γ_{3A}	4,49	0,32	1,88	0,36	2,38
γ_{4A}	21,21	-0,4	4,34	-0,93	6,03
$A_{\min} [M^2]$	0,0395	1,59	0,2	1,48	0,7
$A_{\max} [M^2]$	15,87	42,15	15,03	29,26	69,58
g_1	-0,77	1,86	-0,53	-0,018	-0,0002
g_2	1,37	4,25	7,36	0,52	3,249

Важно отметить, что характер рассеяния излучения покрытием существенно влияет на моментные функции и распределение ЭПР [2]. Так например, переход от гипотетического, идеально рассеивающего ($A_{\lambda 0} = 1$) диффузного покрытия истребителя МИГ-17 (с параметрами индикатрисы обратного отражения на длине волны 1,06 мкм $k_B = 0,08052$, $k_D = 0,8589$, $k_R = 1,036$, $n_\lambda = 1,56$ [6]) к ярко выраженному направленному ($k_B = 7,1825$, $k_D = 0,8314$, $k_R = 0,03134$, $n_\lambda = 1,58$) приводит к увеличению диапазона изменения ЭПР и ее наибольшего значения более чем в два раза. При этом плотность вероятности (**ПВ**) из плоской

трансформируется в существенно обостренную и скошенную в область больших значений ЭПР.

В качестве примера на **рис. 1** представлена формирующая функция $v = \varphi(u)$ ЭПР аэрокосмического корабля Space Shuttle. Трансцендентное уравнение $F_B(v) = F_A(u)$ решалось численными методами с помощью подпрограммы ZEROIN [7]. Абсолютная погрешность вычисления корня не превышала 0,001.

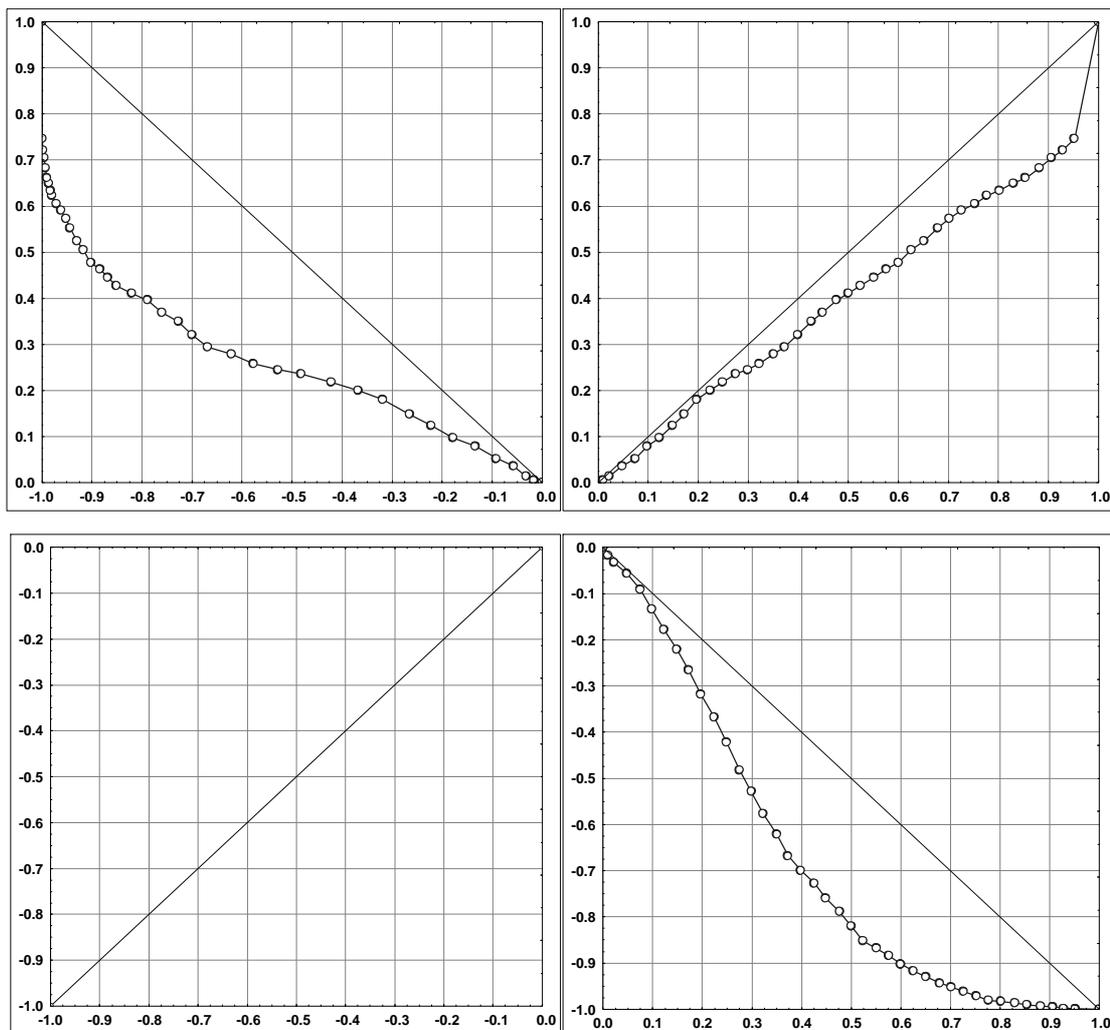


Рис. 1. Система распределений ЭПР объекта Space Shuttle.

Расчеты формирующих функций $v = \varphi(u)$ для различных по конфигурации объектов локации показали, что поправку $\{\varphi(u) - u\}$, характеризующую отклонение распределения ЭПР цели от формирующего бета - распределения (2), как правило, достаточно точно аппроксимирует отрезок ряда Фурье-Чебышева

$$\varphi(u) - u = \sum_{k=0}^K h_k q_k(2u - 1); \quad h_k = 2 \int_0^1 \{\varphi(u) - u\} q_k(2u - 1) w(2u - 1) du, \quad (4)$$

где $w(t)$ весовая функция полинома $q_k(t)$ [8].

Выбор первого или второго рода ортонормированных полиномов Чебышева $q_k(t)$ не существенно влияет на погрешность приближения рядом (4) и, в определенной степени, зависит от конфигурации объекта. Так для самолёта СУ-7Б наибольшую точность приближения обеспечивают полиномы Чебышева первого рода $q_k(t) = T_k(t)$ [8, с. 75]. Абсолютная невязка δ дискретного приближения (1) функции распределения ЭПР объекта СУ-7Б и её аппроксимации системой непрерывных распределений для шести-восьми членов ряда (4) во всех случаях не превышает 0,04 (**рис. 2**). Напротив, для вертолётa МИ-4 лучшие результаты дают полиномы Чебышева второго рода $q_k(t) = U_k(t)$ [8, с. 104] ($\delta \leq 0,07$ при $K = 9$; **рис. 3**). Наконец в случае самолёта МИГ-17 и крылатой ракеты (АЛКМ) точность приближения существенно не зависит от рода полиномов Чебышева ($\delta \leq 0,05$ при $K = 5 \div 8$; рис. 2 и 3).

Коэффициенты ряда Фурье-Чебышева h_k ($k = 0, 1, \dots, K$) вычислялись с помощью адаптивной квадратурной подпрограммы численного интегрирования QUANC8 [7]. Поправка $\{\varphi(u) - u\}$ в подынтегральном выражении заменялась линейным интерполяционным приближением по дискретным точкам, полученным при решении уравнения $F_B(v) = F_A(u)$. Для полиномов Чебышева первого рода интервал интегрирования, в силу разрыва весовой функции на его концах, принимался равным $|2u - 1| \leq 1 - 10^{-7}$. Относительная точность интегрирования во всех случаях была не хуже 10^{-5} .

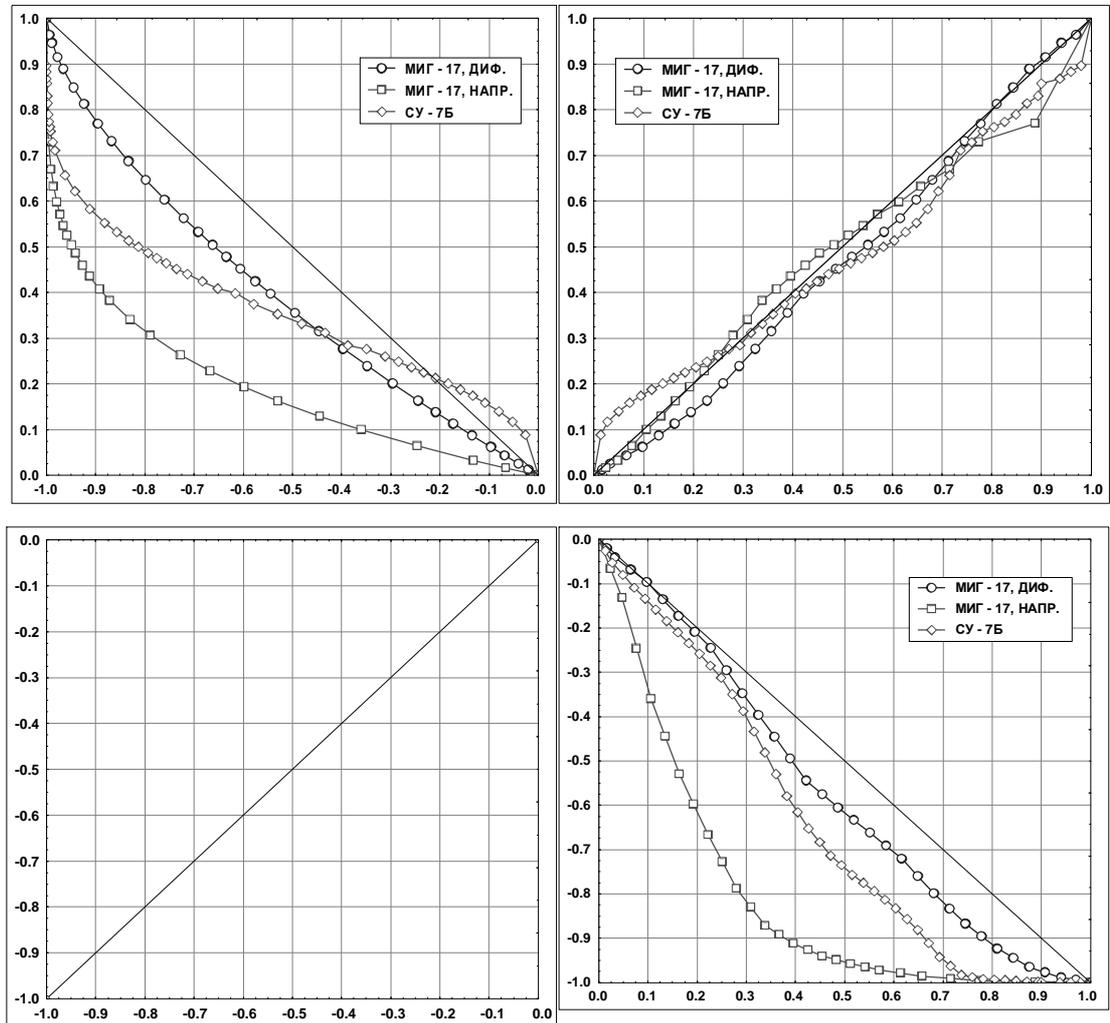


Рис. 2. Система распределений ЭПР объектов МИГ-17 и СУ-7Б.

В **таблице 2** приведены значения коэффициентов разложения (4) для объектов локации и параметров расчета из **таблицы 1**.

Моделирование интегральных параметров. В соответствии с методикой работы [6] рассчитывались пространственные диаграммы обобщенных амплитуды $a_{t_s}(\alpha, \beta)$ и длительности $\tau_{t_s}(\alpha, \beta)$ временного профиля импульсной ЭПР аэрокосмического корабля Space Shuttle. Геометрический образ объекта представлен в работе [6]. Схема размещения четырех типов штатных теплозащитных покрытий (ТЗП) на поверхности корабля приведена в работе [9].

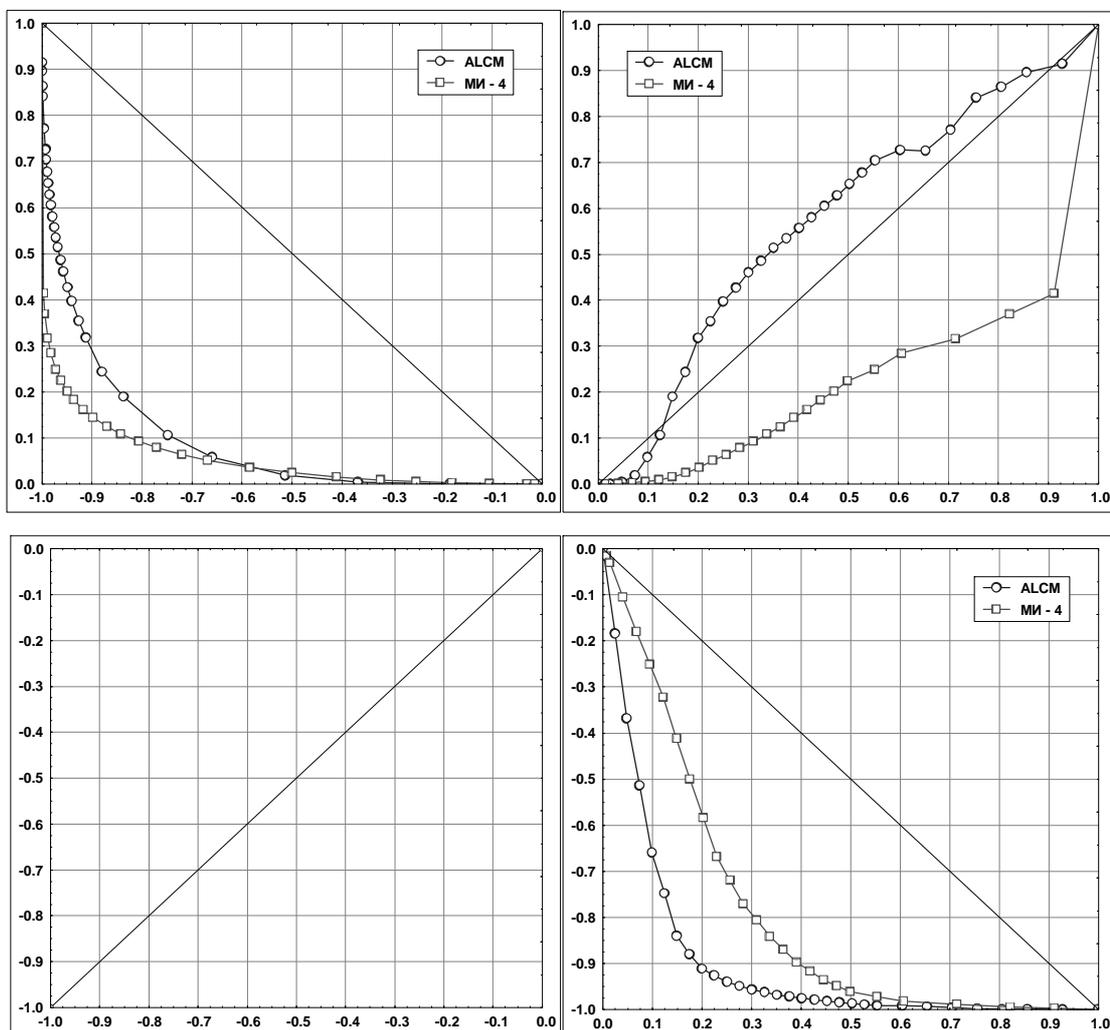


Рис. 3. Система распределений ЭПР объектов ALCM и МИ-4.

Таблица 2. Коэффициенты ряда Фурье-Чебышева целей.

Объект	ALCM	СУ-7Б	МИ-4	МИГ-17	
h_0	1,428	-0,8299	-5,26	-1,086	-2,059
h_1	0,01843	-3,339	-1,888	0,4784	-2,494
h_2	-1,747	1,394	0,3972	0,7761	-1,194
h_3	0,4032	0,8013	0,3048	-0,442	2,308
h_4	0,4057	-0,7592	0,6044	0,00866	2,511
h_5	-0,4642	0,6372	0,405	-0,3016	0
h_6	0	-0,0067	0,2271	-0,1131	0
h_7	0	1,25	0,1279	0	0
h_8	0	0	0,06675	0	0
h_9	0	0	0,04024	0	0

Результаты измерений индикатрис коэффициентов яркости ТЗП корабля на длине волны 1,06 мкм при отражении назад отмечены точками на **рис. 4**.

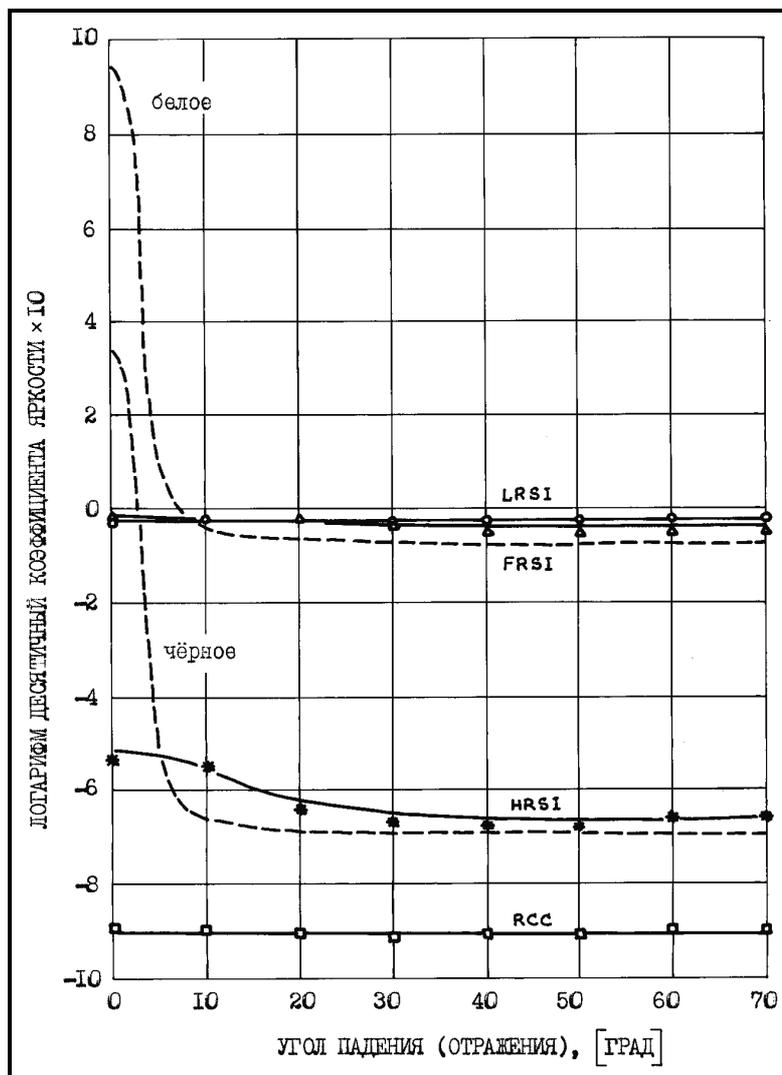


Рис. 4. Индикатрисы коэффициентов яркости ТЗП Space Shuttle: LRSI- белая плитка; FRSI- войлок; HRSI- черная плитка; RCC- углерод.

Сплошные линии на рисунке отвечают аппроксимации экспериментальных данных аналитической моделью коэффициента яркости из работы [6]. Числовые значения параметров k_B, k_D, k_R , приводящие двухкомпонентную модель в соответствие эксперименту, приведены в **таблице 3**. Наибольшая абсолютная ошибка аппроксимации E для четырех типов ТЗП не превысила 0,04.

Таблица 3. Параметры модели индикатрис ТЗП объекта.

Покрытие	$\zeta_{\lambda}(0)$	k_B	k_D	k_R	E
Войлок (FRSI)	0,89	0,06	0,89	0,3946	0,03
Белая плитка (LRSI)	0,94	0	0,94	0	0,01
Черная плитка (HRSI)	0,225	0,1	0,2	0,2373	0,04
Углерод (RCC)	0,14	0	0,14	0	0,01

Сетка адаптивного кубатурного алгоритма [6] формировалась для подинтегрального выражения в формуле для ПХ, соответствующего значению ЭПР при стационарном облучении цели. Временной профиль импульсной ЭПР рассчитывался по полученной сетке с шагом по времени $t_s / 50$. Для интегрирования с относительной погрешностью не хуже 10% требовалось вычислять в зависимости от ракурса от 450 до 900 значений двумерной функции яркости в пределах проекции объекта на картинную плоскость. На **рис. 5** и **6** сплошными линиями представлены сечения пространственных диаграмм обобщенных амплитуды и длительности импульсной ЭПР плоскостями тангажа (а), курса (б) и крена (в) для трех длительностей гауссовского зондирующего импульса (по уровню 0,1) 10; 50 и 200 нс. На рис. 5 приведены также сечения пространственной диаграммы ЭПР объекта при его стационарном облучении $A(\alpha, \beta)$.

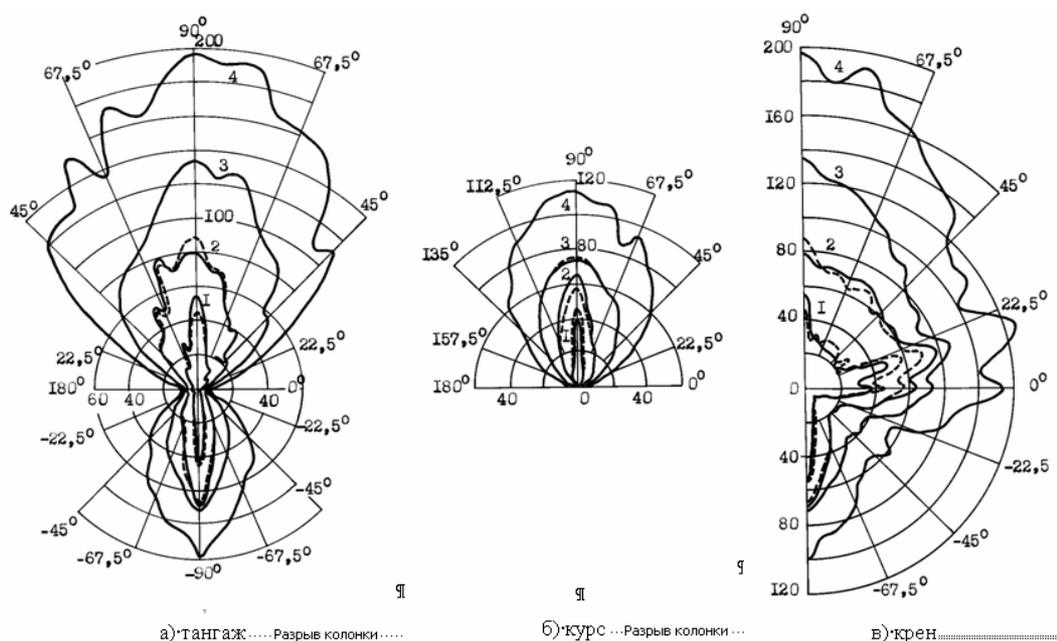
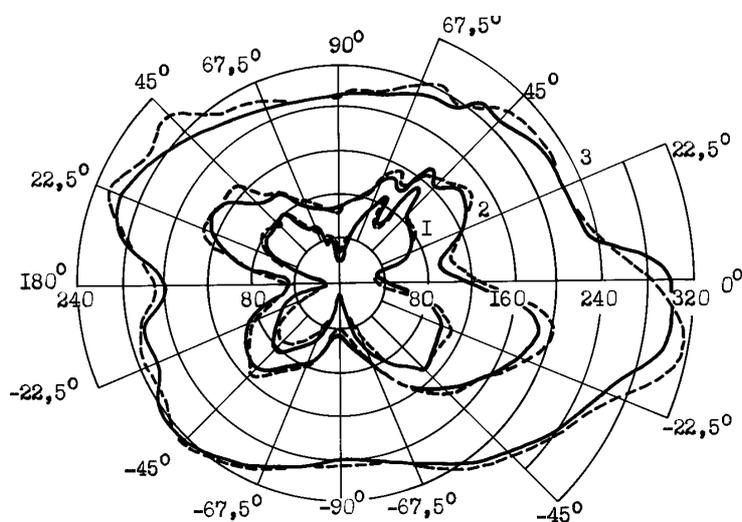
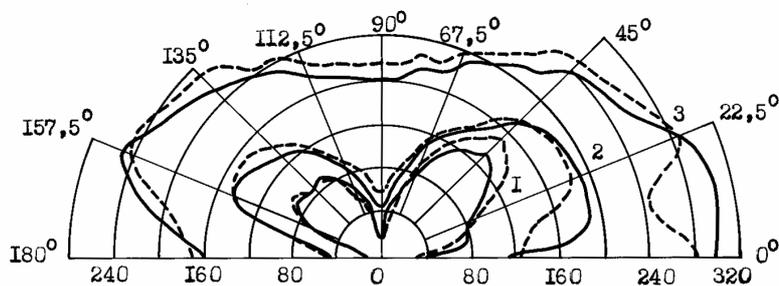


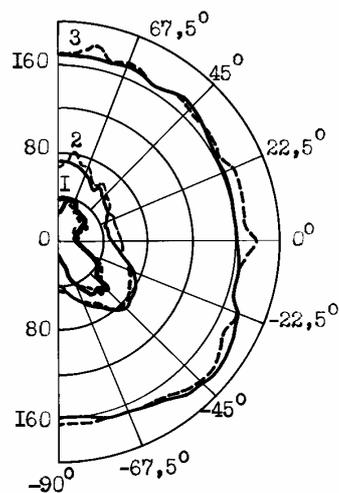
Рис. 5. Обобщенная амплитуда импульсной ЭПР Space Shuttle для длительностей зондирующего импульса: (1) -- 10 нс; (2) -- 50 нс; (3) -- 200 нс; (4) -- стационарное облучение.



а) - тангаж;



б) - курс;



в) - крен.

Рис. 6. Обобщенная длительность импульсной ЭПР Space Shuttle для длительностей зондирующего импульса: (1) - 10 нс; (2) - 50 нс; (3) - 200 нс; (4) - стационарное облучение.

Полученные данные хорошо согласуются с физическим содержанием решаемой задачи. Действительно, для стационарных условий облучения объекта,

когда $t_s \geq T(\alpha, \beta)$, импульсная ЭПР приобретает вид $A_{t_s}(t|\alpha, \beta) = i_s(t) A(\alpha, \beta)$. Ее обобщенная амплитуда суть $a_{t_s}(\alpha, \beta) = a_0(t_s) A(\alpha, \beta)$. Здесь $a_0(t_s)$ - обобщенная амплитуда зондирующего импульса, принимающая значение $1/\sqrt{2}$ для гауссовского временного профиля. Нетрудно проверить, что сечения соответствующих пространственных диаграмм на рис. 5 удовлетворяют соотношению $A(\alpha, \beta) \approx a_{200}(\alpha, \beta)\sqrt{2}$. Дальнейший анализ показал [10], что пространственные диаграммы обобщенной амплитуды импульсной ЭПР объекта, отвечающие различным длительностям зондирующего импульса $t_s \geq 5$ нс (рис. 5), с достаточной для практики точностью аппроксимируются экспоненциальной регрессионной зависимостью вида

$$a_{t_s}(\alpha, \beta) = a_0(t_s) A(\alpha, \beta) \{1 - \exp[-b_0(\alpha, \beta) - b_1(\alpha, \beta)t_s]\}. \quad (5)$$

В этой зависимости двумерные функции ракурса цели $b_0(\alpha, \beta)$ и $b_1(\alpha, \beta)$, инвариантные к значению t_s , удобно рассчитывать методом наименьших квадратов [11, с. 279]. Результаты расчета их сечений плоскостями тангажа (а), курса (б) и крена (в) по ансамблю пространственных диаграмм обобщенной амплитуды импульсной ЭПР корабля Space Shuttle со штатным ТЗП для $t_s = 5; 10; 20; 50; 100$ и 200 нс представлены сплошными линиями на рис. 7 и 8. С учетом соотношения между обобщенными амплитудой и длительностью импульсной ЭПР цели из работы [6] нетрудно получить нелинейную регрессионную зависимость обобщенной длительности импульсной ЭПР объекта от длительности зондирующего импульса

$$\tau_{t_s}(\alpha, \beta) = \{1 - \exp[-b_0(\alpha, \beta) - b_1(\alpha, \beta)t_s]\}^{-1} \left(\int_0^{t_s} i_s(t) dt \right)^2 / \int_0^{t_s} i_s^2(t) dt. \quad (6)$$

Аппроксимации сечений пространственных диаграмм обобщенных амплитуды и длительности импульсной ЭПР корабля Space Shuttle соответственно регрессионными моделями (5) и (6) для $t_s = 10; 50$ и 200 нс представлены пунктирными линиями на рис. 5 и 6. Относительная среднеквадратическая погрешность описания не превышает 2 и 3% для обобщенных амплитуды и длительности.

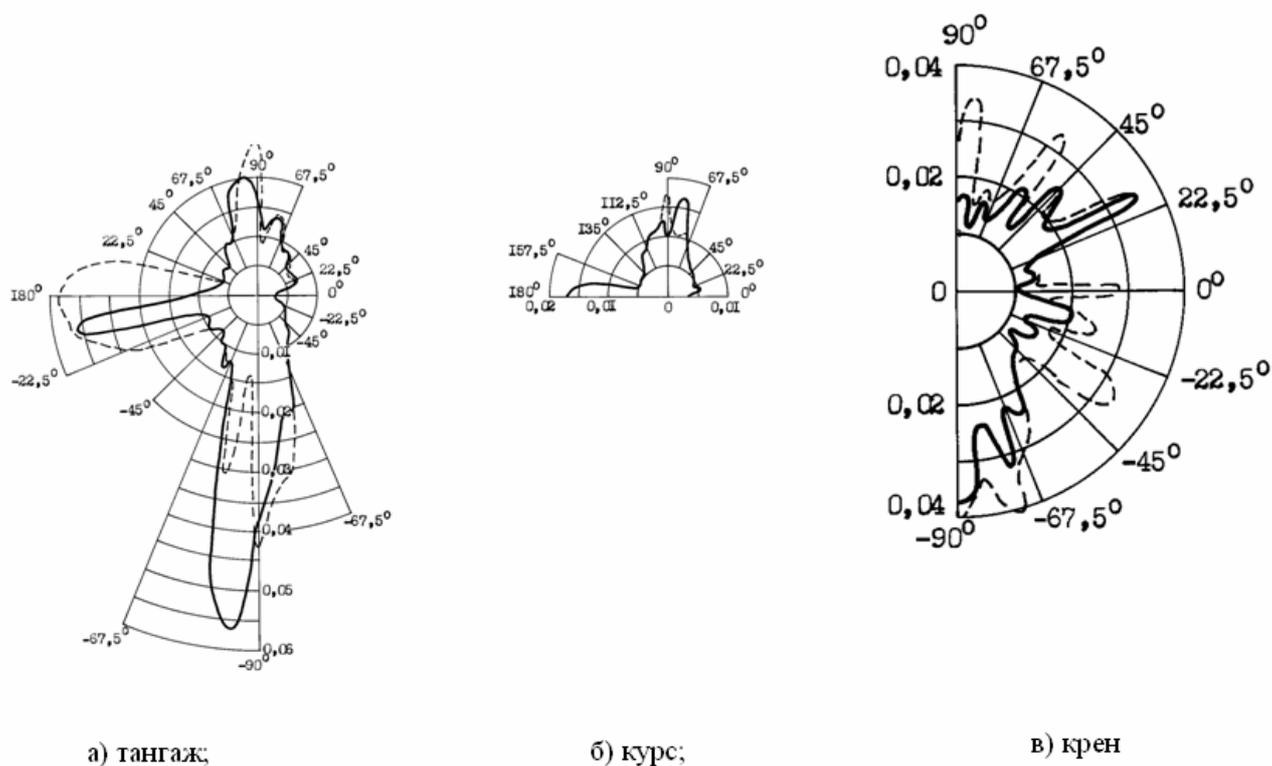


Рис. 7. Сечения пространственной диаграммы $b_0(\alpha, \beta)$ в регрессионной модели обобщенной амплитуды импульсной ЭПР корабля Space Shuttle.

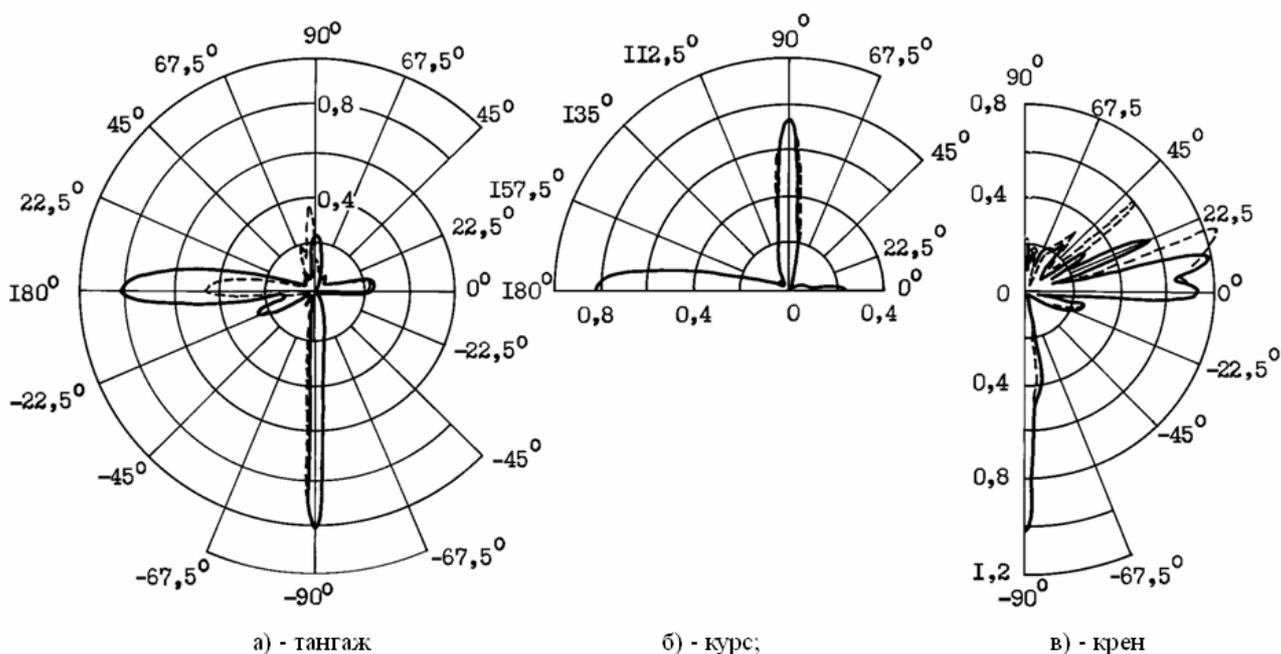


Рис. 8. Сечения пространственной диаграммы $b_1(\alpha, \beta)$ в регрессионной модели

Статистики интегральных параметров. Обобщённые интегральные параметры временного профиля импульсной ЭПР представляют собой детерминированные функции случайных аргументов (α, β) и поэтому также являются случайными величинами. Их собственные и смешанные начальные моменты, с

учётом правила статистического усреднения функций, удобно рассчитывать по формуле:

$$\langle a^n \cdot A^m \rangle = \langle a_{t_s}^n(\alpha, \beta) \cdot A^m(\alpha, \beta) \rangle = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a_{t_s}^n(\alpha, \beta) A^m(\alpha, \beta) W_2(\alpha, \beta) d\beta, \quad (7)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0, 1, 2, \dots$, а символ $\langle \dots \rangle$ означает статистическое усреднение. Здесь и далее (с целью сокращения записи) не приводятся выражения для начальных моментов и других статистик обобщенной длительности, предполагая по умолчанию, что эти выражения аналогичны.

В практических приложениях интерес представляют одномерные распределения и их кумулянты, а также ковариационная матрица интегральных параметров импульсной ЭПР объекта. Математические ожидания $m_a(t_s)$, $m_\tau(t_s)$, средние квадратичные отклонения $\sigma_a(t_s)$, $\sigma_\tau(t_s)$, коэффициенты асимметрии $\gamma_{3a}(t_s)$, $\gamma_{3\tau}(t_s)$ и эксцесса $\gamma_{4a}(t_s)$, $\gamma_{4\tau}(t_s)$ оцениваются по формулам, представленным в работе [3]. Коэффициент корреляции обобщённой амплитуды импульсной ЭПР и её значения при стационарном облучении объекта - суть $\rho_{aA}(t_s) = \{ \langle a \cdot A \rangle - \langle a \rangle \cdot \langle A \rangle \} / \{ \sigma_a(t_s) \cdot \sigma_A \}$.

В соответствии с приведёнными выше формулами и методикой, изложенной в работе [3], рассчитывались статистические характеристики параметров импульсной ЭПР аэрокосмического корабля Space Shuttle со штатным ТЗП при его равновероятной ориентации относительно направления визирования. Для оценки кумулянтов с относительной погрешностью интегрирования не хуже 5% потребовалось сформировать адаптивную сетку по углам α и β , содержащую от 450 до 900 значений соответствующих параметров импульсной ЭПР объекта в зависимости от длительности зондирующего импульса. Результаты расчёта кумулянтов сведены в **таблицы 4 и 5**.

Таблица 4. Статистики обобщенной амплитуды импульсной ЭПР.

t_s [нс]	5	10	20	50	100	200	∞
m_a [М ²]	7,05	10,71	16,13	28,04	39,04	48,22	77.09
σ_a [М ²]	9,85	13,33	16,68	23,24	28,95	32,2	46.75
γ_{3a}	2,27	1,99	1,44	0,81	0,74	0,7	0.62
γ_{4a}	4,11	3,17	1,18	-0,6	-0,29	-0,03	-0.068
ρ_{aA}	0,62	0,69	0,77	0,89	0,96	0,99	1.00
a_{\min} [М ²]	0,2	0,28	0,41	0,81	1,34	1,99	5.46
a_{\max} [М ²]	40,79	54,53	65,12	85,49	119,33	137,21	210.55
ξ_{a1}	-0,4	-0,33	-0,48	-0,1	0,12	0,5	0.74
ξ_{a2}	2,53	2,25	0,87	1,17	1,67	2,2	2.59

Полученные данные хорошо согласуются с экспоненциальной регрессионной зависимостью (5) обобщенной амплитуды импульсной ЭПР корабля от длительности зондирующего импульса. Для границ распределения параметра $a_{\min}(t_s)$ и $a_{\max}(t_s)$, а также его кумулянтов

$$m_a(t_s), \sigma_a(t_s), \rho_{aA}(t_s) \text{ и } \sigma_a(t_s)\gamma_{3a}^{1/3}(t_s), \sigma_a(t_s)\{\gamma_{4a}(t_s)+3\}^{1/4}$$

расчётные точки в соответствующих логарифмических масштабах

$$\begin{aligned} & -\ln[1-a_{\min}(t_s)/\{a_0(t_s)A_{\min}\}] \text{ и } -\ln[1-a_{\max}(t_s)/\{a_0(t_s)A_{\max}\}], \text{ а также} \\ & -\ln[1-m_a(t_s)/\{a_0(t_s)m_A\}], \quad -\ln[1-\sigma_a(t_s)/\{a_0(t_s)\sigma_A\}], \quad -\ln[1-\rho_{aA}(t_s)] \text{ и} \\ & -\ln\left[1-\frac{\sigma_a(t_s)\gamma_{3a}^{1/3}(t_s)}{a_0(t_s)\sigma_A\gamma_{3A}^{1/3}}\right], \quad -\ln\left[1-\frac{\sigma_a(t_s)\{\gamma_{4a}(t_s)+3\}^{1/4}}{a_0(t_s)\sigma_A\{\gamma_{4A}+3\}^{1/4}}\right] \end{aligned}$$

хорошо ложатся на прямые (**рис. 9**). Иными словами, с приемлемой для практики точностью при $t_s > 5$ нс имеют место следующие эмпирические нелинейные регрессионные зависимости [12]

$$\begin{aligned} a_{\min}(t_s) &= A_{\min}a_0(t_s)\{1-\exp(-a_0^{(\min)}-a_1^{(\min)}t_s)\}; \quad m_a(t_s) = m_Aa_0(t_s)\{1-\exp(-m_0-m_1t_s)\}; \\ a_{\max}(t_s) &= A_{\max}a_0(t_s)\{1-\exp(-a_0^{(\max)}-a_1^{(\max)}t_s)\}; \quad \sigma_a(t_s) = \sigma_Aa_0(t_s)\{1-\exp(-\sigma_0-\sigma_1t_s)\}; \\ \gamma_{3a}(t_s) &= \sigma_A^3\gamma_{3A}a_0^3(t_s)\{1-\exp(-\gamma_{30}-\gamma_{31}t_s)\}^3/\sigma_a^3(t_s); \quad \rho_{aA}(t_s) = 1-\exp(-\rho_0-\rho_1t_s); \\ \gamma_{4a}(t_s) &= -3+\sigma_A^4\{\gamma_{4A}+3\}a_0^4(t_s)\{1-\exp(-\gamma_{40}-\gamma_{41}t_s)\}^4/\sigma_a^4(t_s). \end{aligned} \quad (8)$$

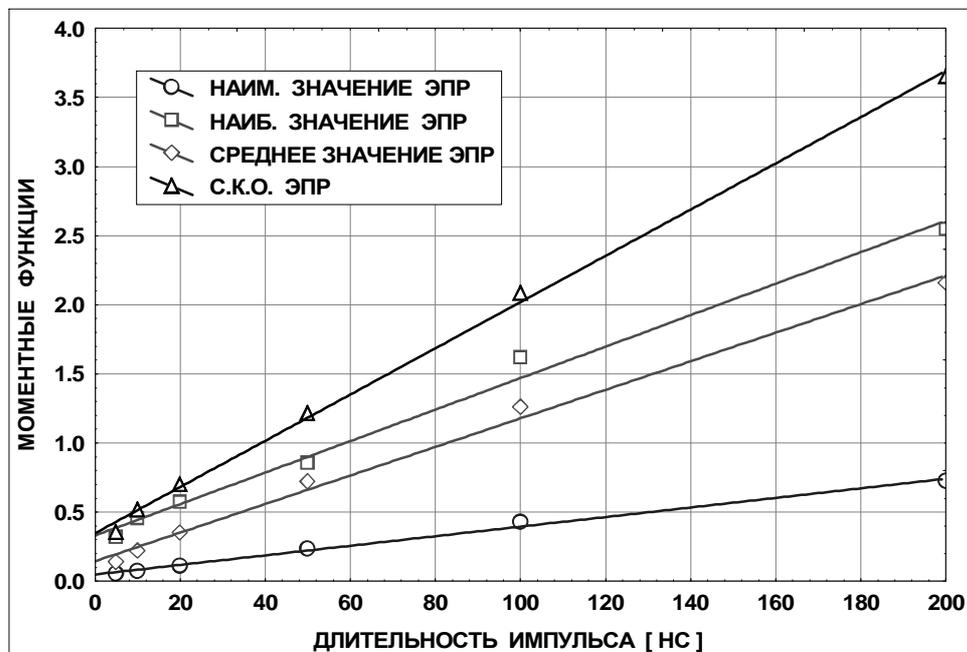


Рис. 9.а. Экспоненциальные регрессионные зависимости:
 $-\ln [1 - a_{\min}(t_S) / \{a_0(t_S) A_{\min}\}]$; $-\ln [1 - a_{\max}(t_S) / \{a_0(t_S) A_{\max}\}]$;
 $-\ln [1 - m_a(t_S) / \{a_0(t_S) m_A\}]$; $-\ln [1 - \sigma_a(t_S) / \{a_0(t_S) \sigma_A\}]$.

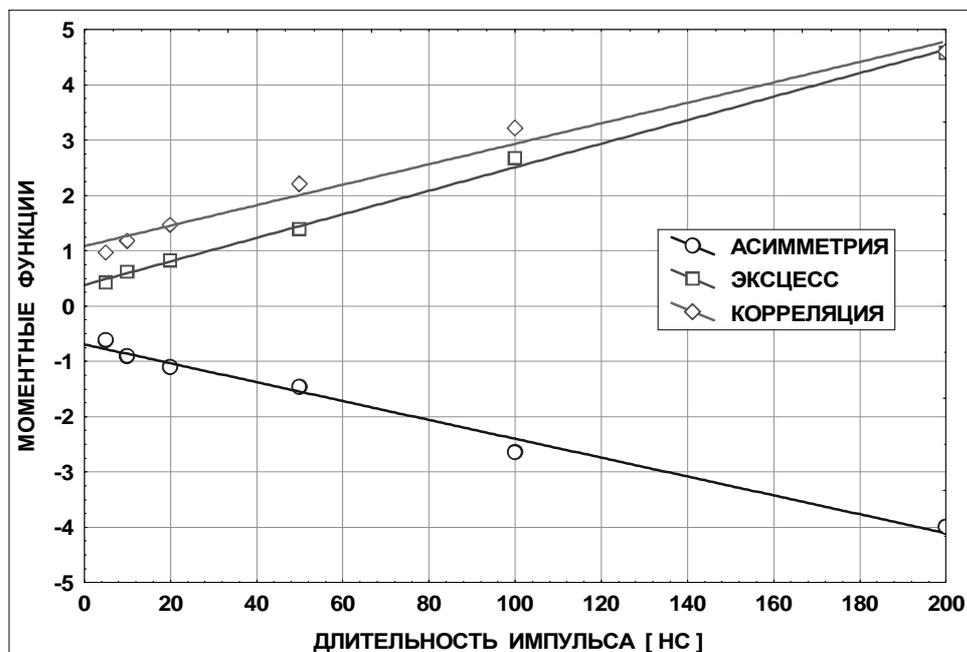


Рис. 9.б. Экспоненциальные регрессионные зависимости:
 $-\ln \left[1 - \frac{\sigma_a(t_S) \gamma_{3a}^{1/3}(t_S)}{a_0(t_S) \sigma_A \gamma_{3A}^{1/3}} \right]$; $-\ln \left[1 - \frac{\sigma_a(t_S) \{\gamma_{4a}(t_S) + 3\}^{1/4}}{a_0(t_S) \sigma_A \{\gamma_{4A} + 3\}^{1/4}} \right]$; $-\ln [1 - \rho_{aA}(t_S)]$.

Оптимальные значения параметров, рассчитанные методом наименьших квадратов по данным таблицы 4, суть: $a_0^{(\min)} = 0,049$; $a_1^{(\min)} = 0,003$;

$$a_0^{(\max)} = 0,331; a_1^{(\max)} = 0,011; m_0 = 0,146; m_1 = 0,0102; \sigma_0 = 0,337; \sigma_1 = 0,0173;$$

$$\rho_0 = 1,086; \rho_1 = 0,019; \gamma_{30} = 0,617; \gamma_{31} = 0,018; \gamma_{40} = 0,42; \gamma_{41} = 0,016.$$

Распределения интегральных параметров. Кусочно-линейная интерполяционная оценка функции распределения, полученная на основе гистограммы интегрального параметра импульсной ЭПР, имеет вид

$$F_a(x) = \sum_{i=1}^M P_i \Delta(x|a_i, a_{i+1}); \Delta(x|a_i, a_{i+1}) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a_i, \\ (x - a_i)/(a_{i+1} - a_i) & \text{при } a_i \leq x < a_{i+1}, \\ 1 & \text{при } x \geq a_{i+1}, \end{cases} \quad (9)$$

где P_i - вероятность попадания значения параметра в i -ый сферический слой его пространственной диаграммы $a_{t_s}(\alpha, \beta)$ или $\tau_{t_s}(\alpha, \beta)$. На **рис. 10.а, б, в** - представлены приближения, аналогичные кусочно-линейной оценке (9), функции распределения $F_a(u|t_s)$ нормированной обобщённой амплитуды импульсной ЭПР корабля Space Shuttle $\{a_{t_s}(\alpha, \beta) - a_{\min}(t_s)\} / \{a_{\max}(t_s) - a_{\min}(t_s)\}$ соответственно для длительностей зондирующего импульса $t_s = 10; 50$ и 200 нс. Разрядные вероятности P_i вычислялись в соответствии с выражением, представленным в работе [3]. Границы областей интегрирования D_i уточнялись с помощью квадратичной интерполяции пространственных диаграмм обобщённой амплитуды по их значениям в узлах сетки по углам α и β . С целью сокращения вычислительных затрат повторно применялась сетка, сформированная алгоритмом адаптивного интегрирования выражения (7). Интерполяция выполнялась в соответствии с кубатурной формулой Симпсона, представленной в работе [3]. Это позволило задать до сорока разрядных интервалов ($M = 40$) и обеспечить приемлемую точность кусочно-линейных интерполяционных оценок (9).

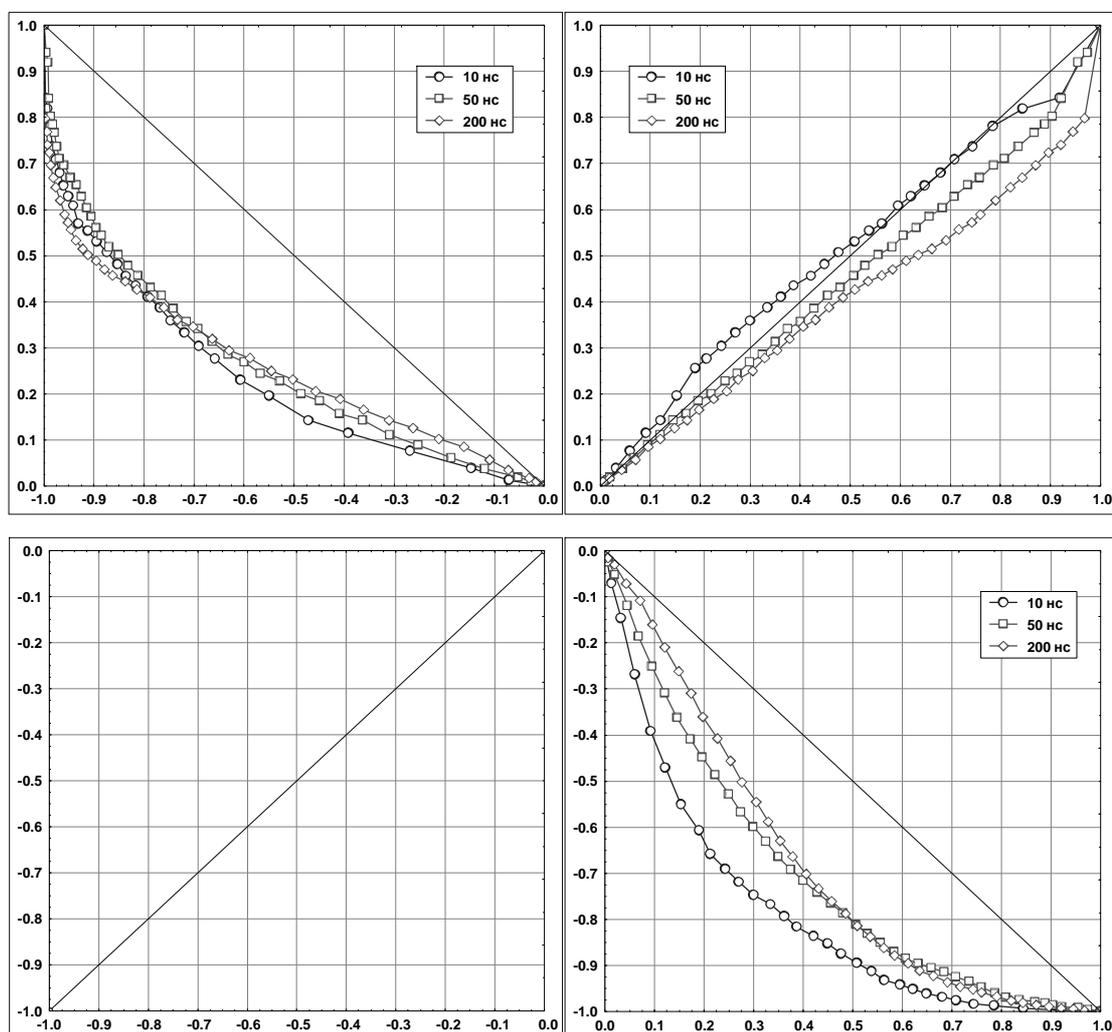


Рис. 10. Система распределений обобщенной амплитуды ЭПР Space Shuttle: а) - 10 нс; б) - 50 нс; в) - 200 нс.

Таблица 5. Статистики обобщенной длительности импульсной ЭПР.

t_s [нс]	5	10	20	50	100	200
m_τ [нс]	55,88	70,1	82,71	101,6	129,87	192,2
σ_τ [нс]	27,08	35,52	41,36	43,88	43,22	42,64
$\gamma_{3\tau}$	-0,29	-0,06	0,17	0,25	0,07	-1,4
$\gamma_{4\tau}$	-0,77	-0,8	-0,61	-0,35	0,82	7,87
$\rho_{\tau\Delta}$	-0,27	-0,34	-0,4	-0,41	-0,4	-0,28
τ_{\min} [нс]	7,7	10,62	17,84	41,07	81,19	160,61
τ_{\max} [нс]	115,07	157,5	193,51	217	262,29	326,3
$g_{\tau 1}$	1,28	1,31	0,98	0,8	-	-
$g_{\tau 2}$	1,73	2,26	2,32	2,1	-	-

Дискретные приближения функций распределения обобщённой амплитуды импульсной ЭПР корабля, отвечающие различным длительностям зондирующего импульса t_s , хорошо аппроксимируются системой непрерывных распределений $F_B^{(a)}\{\varphi(u)|t_s\}$. Показатели степени $g_{a1}(t_s)$ и $g_{a2}(t_s)$ формирующего бета - распределения (2) рассчитывались методом моментов в соответствии с выражениями (3). Важно отметить, что этап оптимизации значений $g_{a1}(t_s)$ и $g_{a2}(t_s)$ намеренно исключался из процедуры идентификации параметров формирующего бета - распределения $F_B^{(a)}(u|t_s)$. Это упрощение существенно не увеличило абсолютную невязку $|\mathbb{F}_a(u|t_s) - F_B^{(a)}(u|t_s)|$ и, в тоже время, позволило получить регрессионную зависимость системы непрерывных распределений $F_B^{(a)}\{\varphi(u)|t_s\}$ от длительности зондирующего импульса t_s . Значения параметров $g_{a1}(t_s)$ и $g_{a2}(t_s)$ для объекта Space Shuttle приведены в таблице 4. На рисунках 10.а, б, в представлены интерполяционные приближения формирующей функции $v = \varphi(u)$ ЭПР корабля для $t_s = 10; 50$ и 200 нс, а в **таблице 6** соответствующие им значения коэффициентов ряда (4) по ортонормированным полиномам Фурье - Чебышева второго рода, аппроксимирующие поправку $\{\varphi(u) - u\}$. Во всех случаях абсолютная невязка $|\mathbb{F}_a(u|t_s) - F_B^{(a)}\{\varphi(u)|t_s\}|$ распределений для пяти - одиннадцати членов ряда (4) не превышала 0,005.

Анализ расчетных данных обнаруживает слабую зависимость формирующей функции от длительности зондирующего импульса (**рис. 11**). Указанное обстоятельство позволяет предложить в качестве интегральной модели реального времени импульсной ЭПР объекта локации ковариационное приближение двумерной функции распределения [13] обобщенной амплитуды импульсной ЭПР $a_{t_s}(\alpha, \beta)$ и ее значения для стационарных условий облучения цели $A(\alpha, \beta)$.

$$F_2^{(2)}(a, A | t_s) = \sum_{n=0}^N \frac{\rho_{aA}^n(t_s)}{n!} \left(\frac{d^n}{da^n} F_B^{(a)}\{\varphi(u_a)|t_s\} \right) \left(\frac{d^n}{dA^n} F_B^{(A)}\{\varphi(u_A)\} \right), \quad (10)$$

где $u_a = \{a - a_{\min}(t_S)\} / \{a_{\max}(t_S) - a_{\min}(t_S)\}$ и $u_A = \{A - A_{\min}\} / \{A_{\max} - A_{\min}\}$ - соответствующие нормированные значения.

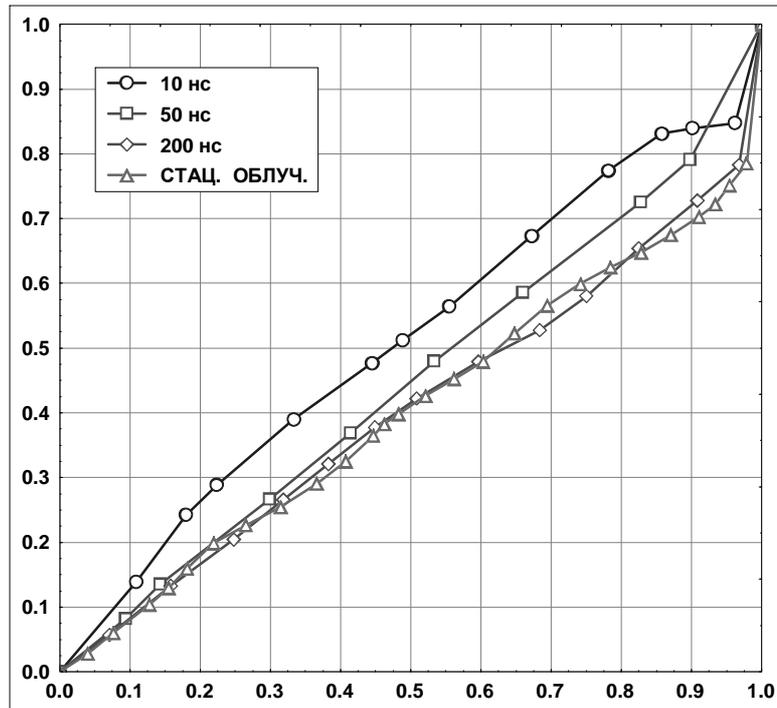


Рис. 11. Формирующие функции системы распределений обобщенной амплитуды ЭПР Space Shuttle.

Таблица 6. Коэффициенты ряда Фурье-Чебышева для обобщенной амплитуды корабля Space Shuttle.

t_S [нс]	5	10	20	50	100	200
h_0	-0,825	-0,159	2,948	-1,551	-2,611	-4,27
h_1	-1,085	-0,689	2,686	-1,687	-2,777	-5,319
h_2	-0,937	-0,89	-1,031	-0,599	-1,177	-1,592
h_3	-0,431	-0,812	-1,778	0,462	-	-
h_4	-0,099	-0,387	-0,905	0,22	-	-
h_5	0,026	0,493	0,438	-	-	-
h_6	-0,283	0,248	0,493	-	-	-
h_7	-0,229	0,145	-0,468	-	-	-
h_8	-	0,422	0,056	-	-	-
h_9	-	0,073	0,343	-	-	-
h_{10}	-	-0,108	-	-	-	-

Подчеркнем, что запись $F_B^{(a)}(u|t_s)$ акцентирует зависимость формирующего бета - распределения обобщенной амплитуды импульсной ЭПР объекта от длительности зондирующего импульса t_s через зависимости соответствующих параметров $a_{\min}(t_s)$, $a_{\max}(t_s)$, $g_{a1}(t_s)$, $g_{a2}(t_s)$ и, в конечном итоге, через регрессионные зависимости (8). Отметим также, что ковариационное приближение (10) хорошо согласуется с системой двумерных распределений, предложенной Beckmann [14]. В частности из приведенной в [14] теоремы следует, что в силу положительной коррелированности $\rho_{aA}(t_s) > 0$ анализируемых отражательных характеристик приближение (10) удовлетворяет всем свойствам вероятностных распределений, в том числе неотрицательно в области определения $a_{\min}(t_s) \leq a \leq a_{\max}(t_s)$ и $A_{\min} \leq A \leq A_{\max}$. Формулы для вычисления производных распределений $F_B^{(a)}\{\varphi(u_a)|t_s\}$ и $F_B^{(A)}\{\varphi(u_A)\}$ приведены в **Приложении**.

Модель реального времени. Из выражений (10) и (П.5) непосредственно следует ковариационное приближение условной плотности вероятности обобщенной амплитуды импульсной ЭПР при ее фиксированном значении для стационарных условий облучения объекта

$$\begin{aligned} f_1^{(2)}(a|t_s, A) &= \left(2f_B^{(A)}\{2\varphi(u_A) - 1\}\right)^{-1} \frac{d^2}{dadA} F_2^{(2)}\{a, A|t_s\} = \\ &= 2f_B^{(a)}\{2\varphi(u_a) - 1|t_s\} \sum_{n=0}^N \frac{\rho_{aA}^n(t_s)}{n!} C_{n+1}(u_a) C_{n+1}(u_A). \end{aligned} \quad (11)$$

Полученные оценки позволяют реализовать эффективную в вычислительном отношении пошаговую процедуру статистического моделирования обобщенных интегральных параметров импульсной ЭПР цели.

Шаг 1: Статистическое моделирование ЭПР объекта.

$$A = A_{\min} + (A_{\max} - A_{\min})u_A, \quad u_A = \varphi^{-1}(v_A),$$

где $\varphi^{-1}(v)$ - функция обратная к формирующей функции $v = \varphi(u)$; v_A - реализация непрерывной случайной величины из генеральной совокупности, характеризуемой бета - распределением (2) с параметрами

g_{A1} и g_{A2} . Экономичные алгоритмы моделирования бета - распределения представлены в [15].

Шаг 2: Статистическое моделирование обобщенной амплитуды импульсной ЭПР объекта. Для больших длительностей зондирующего импульса t_S , обеспечивающих сильную корреляцию отражательных характеристик $\rho_{aA}(t_S) \geq 0,8$, естественно воспользоваться линейной регрессионной зависимостью

$$a(t_S) = m_a(t_S) + \rho_{aA}(t_S)\sigma_a(t_S)(A - m_A)/\sigma_A.$$

В противном случае двумерное распределение отражательных характеристик (10) не вырождено и ковариационный ряд (11) сходится быстро. Поэтому моделирование целесообразно осуществлять по формуле $a(t_S) = a_{\min}(t_S) + \{a_{\max}(t_S) - a_{\min}(t_S)\}u_a$. Здесь u_a - реализация непрерывной случайной величины из генеральной совокупности, характеризующейся условной плотностью распределения вероятностей

$$f_1^{(2)}(u_a | t_S, u_A) = \frac{\Gamma\{g_{a1}(t_S) + g_{a2}(t_S) + 2\}}{\Gamma\{g_{a1}(t_S) + 1\}\Gamma\{g_{a2}(t_S) + 1\}} u_a^{g_{a1}(t_S)} (1 - u_a)^{g_{a2}(t_S)} \times \\ \times \sum_{n=0}^N \frac{\rho_{aA}^n(t_S)}{n!} C_{n+1}(u_a) C_{n+1}(u_A).$$

Метод кусочной аппроксимации Бусленко [16, с. 22] реализует удобный алгоритм моделирования одномерного распределения общего вида.

Шаг 3: Статистическое моделирование обобщенной длительности импульсной ЭПР объекта $\tau(t_S) = A \cdot \int_0^{t_S} i_S(t) dt / a(t_S)$.

Отметим, что дискретные приближения функций распределения обобщенной длительности импульсной ЭПР корабля Space Shuttle, отвечающие длительностям зондирующего импульса $t_S \leq 50$ нс, также хорошо аппроксимируются системой непрерывных распределений $F_B^{(\tau)}\{\varphi(u)\}$. На рис. 12.а, б представлены приближения, аналогичные кусочно-линейной оценке (9), функции

распределения $f_{\tau}(u)$ нормированной обобщённой длительности импульсной ЭПР корабля $\{\tau_{t_s}(\alpha, \beta) - \tau_{\min}\} / \{\tau_{\max} - \tau_{\min}\}$ соответственно для длительностей зондирующего импульса $t_s = 10$ и 50 нс. В таблице 5 приведены оптимальные значения показателей степени g_{τ_1} и g_{τ_2} формирующего бета - распределения (2) для $t_s = 5; 10; 20$ и 50 нс. **Таблица 7** содержит соответствующие значения коэффициентов ряда (4) по ортонормированным полиномам Фурье - Чебышева второго рода, аппроксимирующие поправку $\{\varphi(u) - u\}$. Во всех случаях абсолютная невязка $|f_{\tau}(u) - F_B^{(\tau)}\{\varphi(u)\}|$ распределений для четырех - шести членов ряда (4) не превышала $0,01$.

Заключение. Изложенное позволяет сделать следующие выводы.

1. Для различных типов космических, воздушных и наземных объектов выявлена устойчивая статистика поведения параметров Пирсона, свидетельствующая о близости плотности вероятности ЭПР и ИКЯ к классу бета-распределений в дно- и двухпозиционных оптических системах.

2. Предложена унифицированная статистическая модель обобщенных амплитуд временных профилей импульсных ЭПР и ИКЯ целей в виде системы, реализующей нелинейное преобразование стандартного бета- распределения в распределение соответствующей характеристики заметности цели. Формирующая функция этой системы хорошо описывается отрезком ряда Фурье-Чебышева.

3. Для однопозиционных систем оптической локации представлена экспоненциальная регрессионная модель статистик отражательных характеристик объекта в зависимости от длительности зондирующего импульса. Обнаруженные закономерности позволили предложить модель реального времени обобщенных амплитуды и длительности временного профиля импульсной ЭПР в виде ковариационного приближения совместной плотности распределения ве-

роятности обобщенной амплитуды импульсной ЭПР и ее значения при стационарном облучении цели.

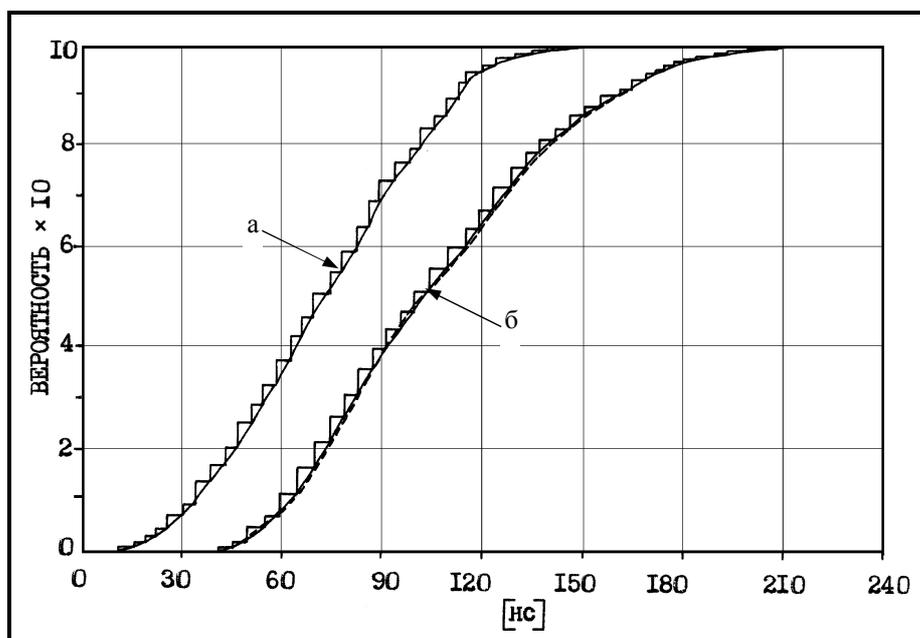


Рис. 12. Функции распределения обобщенной длительности ЭПР Space Shuttle: а) - 10 нс; б) - 50 нс.

Таблица 7. Коэффициенты ряда Фурье-Чебышева для обобщенной длительности корабля Space Shuttle.

t_s [нс]	5	10	20	50
h_0	0,285	-0,196	-0,997	-0,934
h_1	0,048	-2,21	-1,374	-4,644
h_2	0,414	-0,628	-0,423	-2,208
h_3	-0,703	-1,34	-0,308	0,315
h_4	-0,6	-1,61	0,346	-0,472
h_5	-	-	0,98	-
h_6	-	-	0,988	-

Приложение. Некоторые неудобства практического применения ряда (10) связаны с необходимостью многократного дифференцирования распределения $F_B\{\varphi(u)\}$, где $u = \{A - A_{\min}\} / \{A_{\max} - A_{\min}\}$. Первую производную получим по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dA}(F_B\{\varphi(u)\}) = 2f_B\{2\varphi(u)-1\}\Phi_1(u); \quad \Phi_1(u) = \frac{d\{\varphi(u)\}/du}{A_{\max} - A_{\min}}, \text{ где} \quad (\text{П.1})$$

$$f_B(x) = \frac{\Gamma(g_2 + g_1 + 2)}{2\Gamma(g_2 + 1)\Gamma(g_1 + 1)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{g_2} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{g_1}; \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (\text{П.2})$$

- плотность вероятности модифицированного бета- распределения. Для последующего дифференцирования выражения (П.1) целесообразно предварительно получить формулы для дифференцирования плотности вероятности (П.2).

Производные высших порядков $d^{n-1}\{f_B(x)\}/dx^{n-1}$, ($n=2,3,\dots$) удобно вычислять с помощью формулы Родрига [17, с. 591]

$$d^{n-1}\{f_B(x)q^{n-1}(x)\}/dx^{n-1} = c_{n-1}P_{n-1}(x)f_B(x); \quad (n=1,2,\dots). \quad (\text{П.3})$$

Здесь $q(x) = 1-x^2$; $c_{n-1} = (-1)^{n-1}2^{n-1}(n-1)!$ - функциональный ряд, а $P_{n-1}(x)$ - полиномы Якоби ортогональные с весом $(1-x)^{g_2}(1+x)^{g_1}$ на интервале $[-1,1]$.

Рекуррентная формула для вычисления полиномов Якоби имеет вид

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = \{(g_2 + g_1 + 2)x + g_2 - g_1\}/2;$$

$$P_{n+1}(x) = \{(G_{n2} + G_{n3}x)P_n(x) - G_{n4}P_{n-1}(x)\}/G_{n1}; \quad (n=1,2,\dots);$$

$$G_{n1} = 2(n+1)(n+g_2+g_1+1)(2n+g_2+g_1); \quad G_{n2} = (2n+g_2+g_1+1)(g_2^2 - g_1^2);$$

$$G_{n3} = \frac{\Gamma(2n+g_2+g_1+3)}{\Gamma(2n+g_2+g_1)}; \quad G_{n4} = 2(n+g_2)(n+g_1)(2n+g_2+g_1+2).$$

Дифференцируя левую часть равенства (П.3) в соответствии с теоремой Лейбница и разрешая его относительно старшей производной, по индукции получим

$$d^{n-1}\{f_B(x)\}/dx^{n-1} = f_B(x)W_{n-1}(x); \quad (n=2,3,\dots), \quad (\text{П.4})$$

где функция $W_{n-1}(x)$ удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению

$$W_0(x) = 1; \quad Q_{2n-m-2}(x) = \frac{d^m}{dx^m}\{q^{n-1}(x)\} = \sum_{k=\lfloor m/2 \rfloor + 1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \binom{2k}{m} m! x^{2k-m};$$

$$W_{n-1}(x) = \left[c_{n-1}P_{n-1}(x) - \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n-1}{m} W_{n-m-1}(x) Q_{2n-m-2}(x) \right] / (1-x^2)^{n-1}.$$

Здесь символ [*] в нижнем пределе суммирования означает целую часть числа. В итоге последовательное дифференцирование левой части равенства (П.1) с учетом формулы (П.4) дает

$$d^n (F_B \{ \varphi(u) \}) / dA^n = 2f_B \{ 2\varphi(u) - 1 \} C_n(u); \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{П.5}).$$

Первые пять функций $C_n(u)$ имеют вид:

$$C_1(u) = \Phi_1(u); \quad C_2(u) = 2W_1 \{ 2\varphi(u) - 1 \} \Phi_1^2(u) + \Phi_2(u);$$

$$C_3(u) = 4W_2 \{ 2\varphi(u) - 1 \} \Phi_1^3(u) + 6W_1 \{ 2\varphi(u) - 1 \} \Phi_1(u) \Phi_2(u) + \Phi_3(u);$$

$$C_4(u) = 8W_3 \{ 2\varphi(u) - 1 \} \Phi_1^4(u) + 24W_2 \{ 2\varphi(u) - 1 \} \Phi_1^2(u) \Phi_2(u) + 6W_1 \{ 2\varphi(u) - 1 \} \Phi_2^2(u) + \\ + 8W_1 \{ 2\varphi(u) - 1 \} \Phi_1(u) \Phi_3(u) + \Phi_4(u);$$

$$C_5(u) = 16W_4 \{ 2\varphi(u) - 1 \} \Phi_1^5(u) + 80W_3 \{ 2\varphi(u) - 1 \} \Phi_1^3(u) \Phi_2(u) + \\ + 40W_2 \{ 2\varphi(u) - 1 \} \Phi_1^2(u) \Phi_3(u) + 60W_2 \{ 2\varphi(u) - 1 \} \Phi_1(u) \Phi_2^2(u) + \\ + 10W_1 \{ 2\varphi(u) - 1 \} \Phi_1(u) \Phi_4(u) + 20W_1 \{ 2\varphi(u) - 1 \} \Phi_2(u) \Phi_3(u) + \Phi_5(u).$$

Здесь $\Phi_n(u)$ - n -я производная формирующей функции. Дифференцируя отрезок ряда Фурье - Чебышева (4) получим

$$\Phi_n(u) = \frac{d^n \{ \varphi(u) \} / du^n}{(A_{\max} - A_{\min})^n} = \begin{cases} [1 + 2 \sum_{k=1}^K h_k p_k^{(1)}(2u-1)] / (A_{\max} - A_{\min}) & \text{при } n = 1, \\ 2^n \sum_{k=n}^K h_k p_k^{(n)}(2u-1) / (A_{\max} - A_{\min})^n & \text{при } 2 \leq n \leq K, \end{cases}$$

где $p_k^{(n)}(x) = d^n \{ q_k(x) \} / dx^n$ - n -я производная ортонормированного полинома Чебышева. Ясно, что $\Phi_n(u) \equiv 0$ при $n > K$. Кроме того из рекуррентной формулы для полиномов Чебышева и теоремы Лейбница непосредственно следует пошаговая рекуррентная процедура вычисления производных.

Шаг 0: Начальная инициализация.

$$n = 1; \quad q_0(x) = 1; \quad q_1(x) = d_1 x; \quad p_0^{(1)}(x) = 0; \quad p_1^{(1)}(x) = d_1,$$

где $d_1 = 1$ для полиномов Чебышева первого рода и $d_1 = 2$ для полиномов второго рода.

Шаг 1: Вычисление полиномов и их первой производной.

$$p_{k+1}^{(1)}(x) = 2x p_k^{(1)}(x) + 2q_k(x) - p_{k-1}^{(1)}(x); \quad q_{k+1}(x) = 2x q_k(x) - q_{k-1}(x); \quad (k = 1, 2, \dots, K).$$

Шаг 2: Текущая инициализация или окончание.

Если $n < K$ *то* $n = n + 1$; $p_0^{(n)}(x) = 0$; $p_1^{(n)}(x) = 0$ *иначе Стоп.*

Шаг 3: Вычисление высших производных полиномов.

$$p_{k+1}^{(n)}(x) = 2xp_k^{(n)}(x) + 2np_k^{(n-1)}(x) - p_{k-1}^{(n)}(x); (k = 1, 2, \dots, K).$$

Шаг 4: Цикл по порядку производных полиномов. *Идти к Шагу 2.*

Литература.

1. Непогодин И. А., Козенко А. А. Статистическая модель эффективной площади рассеяния тел в оптическом диапазоне // Импульсная фотометрия. - Л. : Машиностроение, 1984. - Вып. 8. - С. 21-25.
2. Лабунец Л. В., Мусьяков М. П. и др. Вероятностное распределение эффективной площади рассеяния летательных аппаратов в однопозиционной лазерной локации // Вопросы специального машиностроения. - 1987. - Сер. 4.- Вып. 9(165). - С. 36-43.
3. Лабунец Л. В. Цифровая обработка переходных характеристик 3D объектов в однопозиционной системе оптической локации // Радиотехника и электроника (в печати).
4. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. - 2 е изд., перераб. и доп. - М. : Радио и связь, 1982. - 624 с.
5. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Пер. с англ. - М. : Мир, 1975. - 534с.
6. Лабунец Л. В. Математическое и физическое моделирование переходных характеристик 3D объектов в однопозиционной системе оптической локации // Радиотехника и электроника (в печати).
7. Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler C. B. Computer Methods for Mathematical Computations. - New York : Prentice Hall, 1977.
8. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. - 2 -е изд., доп. М. : Наука, 1979. - 416 с.

9. Cooper P. A., Holloway P. F. The Shuttle Tile Story // *Astronautics and Aeronautics*. - 1981. - V. 19. - № 1. - P. 24-34.
10. Лабунец Л. В., Шашлов М. Н. и др. Исследование эффективной площади рассеяния аэрокосмического корабля в однопозиционной оптической локации // *Вопросы специального машиностроения*. - 1989.- Сер. 4.- Вып. 7(187).- С. 11-23.
11. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ: В 2 -х кн., Кн. 1 / Пер. с англ.- 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 1986. - 366 с.
12. Лабунец Л. В., Шашлов М. Н. и др. Статистические характеристики эффективной площади рассеяния аэрокосмического корабля в однопозиционной оптической локации // *Вопросы специального машиностроения*. - 1990. - Сер. 4. - Вып. 9(193). - С. 21-36.
13. Лабунец Л. В. Корреляционное приближение многомерных вероятностных распределений // *Вопросы проектирования кибернетических устройств: Труды МВТУ*. - 1987. - Вып. 493. - С. 3-12.
14. Beckmann P. Scattering by Non-Gaussian Surface // *IEEE Transactions*. - 1973. - V. AP-21. - № 2. - P. 169-175.
15. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Курс статистического моделирования М. : Наука, 1982. - 296 с.
16. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. - М. : Советское радио, 1971. - 328 с.
17. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables - New York : National Bureau of Standards, 1964.