

ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ
ЗАТЕНЕНИЙ ЛУЧА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

© 2001 г. Л. В. Лабунец

Поступила в редакцию 10.11.2000 г.

Представлена интерполяционная оценка вероятности затенений луча случайным профилем шероховатой поверхности общего вида. В рамках метода аппроксимации по участкам получено ковариационное приближение членов ряда Райса в случаях слабых, средних и сильных затенений.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании рассеяния зондирующего излучения объектами локации возникает необходимость учета эффектов затенений и маскировки шероховатой поверхности относительно падающей и отраженной волн. В коротковолновом приближении вопрос сводится к оценке вероятности отсутствия пересечения с поверхностью луча, выходящего из ее произвольной точки под произвольным углом. Геометрический подход к решению этой задачи предложен в работе [1]. Однако допущения, принятые при выводе геометрического коэффициента ослабления падающего потока, существенно ограничивают область применимости указанной характеристики в теоретической фотометрии. Значительно более универсальный подход статистической радиофизики, изложенный в работе [2], опирается на положения теории выбросов случайных процессов. Последняя определяет вероятность отсутствия затенений, как вероятность отрицательного выброса бесконечной длительности через падающий и(или) отраженный лучи [3]. Вместе с тем в работе [2] представлен анализ лишь предельных значений указанной вероятности в случаях слабого и сильного затенения шероховатой поверхности. Рассмотренный в работе [4] интерполяционный метод оценки характеристик выбросов случайных процессов общего вида позволяет в значительной степени устранить отмеченные ограничения.

1. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ОЦЕНКА

Задачу оценки вероятности затенений рационально решать методом пространственной дискретизации [5]. Как и в работе [4], реализацию $\xi(x)$ одномерного случного профиля поверхности аппроксимируем интерполяционным приближением по его отсчетам $\xi_n = \xi(x_n)$ в дискретных точках x_n ($n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$). В качестве интерполирующей функции выберем треугольную с текущей опорной областью, охватывающей каждые два соседних интервала интерполяции про-

филя. В этом случае протяженность *отрицательного* выброса профиля поверхности через луч $y(x) = y_0 + (x - x_0)\tan\alpha$, выходящий из точки с высотой $y_0 = \xi(x_0)$ под углом $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ к горизонтальной оси, удобно анализировать в системе случайных событий:

$$C_n^-: \{\xi_{-1} \geq y_{-1}; \xi_0 < y_0; \dots; \xi_n < y_n\}; \\ E_{n,m}^-: \{\xi_n < y_n; \xi_{n+1} < y_{n+1}; \dots; \xi_{n+m} < y_{n+m}\}.$$

Здесь $y_n = y(x_n)$ – отсчет луча в точке x_n . Очевидно, что событие C_0^- фиксирует факт начала отрицательного выброса в пространственном интервале $[x_{-1}, x_0]$, а событие $E_{n,m}^-$ – факт отсутствия его окончания в интервале $[x_n, x_{n+m}]$. Тогда вероятность наблюдать отрицательный выброс бесконечно большой протяженности получим в виде $q_\infty(x_0, y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{C_{n+1}^-\} / P\{C_0^-\}$.

Узлы интерполяции x_n ($n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$) выберем таким образом, чтобы коэффициенты корреляции отсчетов случного профиля поверхности $r_{i,j} \leq \varepsilon_1$, как только $|i - j| > M$, где ε_1 – достаточно малый уровень значимости, а M – натуральное число. Таким образом, в случайной последовательности $\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots$ практически коррелированы лишь члены, отстоящие друг от друга не более чем на M интервалов интерполяции. В итоге для пространственных отсчетов профиля поверхности с индексами $n + 1 > M - 1$ вероятность $P\{C_{n+1}^-\}$ наблюдать выброс с протяженностью, большей чем $(x_{n+1} - x_{-1})$, рационально вычислять с помощью *M-связного* приближения

$$P\{C_{n+1}^-\} = P\{C_{M-1}^-\} \prod_{m=M}^{n+1} \frac{P\{E_{(m-M), M}^-\}}{P\{E_{(m-M), (M-1)}^-\}} = \\ = P\{C_n^-\} \frac{P\{E_{(n+1-M), M}^-\}}{P\{E_{(n+1-M), (M-1)}^-\}}.$$
(2)

Для пространственных отсчетов профиля поверхности с индексами $n \leq M - 1$ вероятности событий C_n^- могут быть также выражены через вероятности событий (1)

$$\begin{aligned} P\{C_0^-\} &= P\{E_{0,0}^-\} - P\{E_{-1,1}^-\}; \\ P\{C_1^-\} &= P\{E_{0,1}^-\} - P\{E_{-1,2}^-\}; \dots; \\ P\{C_{M-1}^-\} &= P\{E_{0,M-1}^-\} - P\{E_{-1,M}^-\}. \end{aligned} \quad (3)$$

В результате расчет вероятностей последовательности гипотез $P\{C_{n+1}^-\}$, ($n = 1, 2, \dots$) относительно протяженности отрицательного выброса по рекуррентным формулам (2) и (3) сводится к оценке многомерной интегральной функции распределения размерности не более чем $(M + 1)$. Ее ковариационное приближение [6] дает оценку:

$$\begin{aligned} P\{E_{n,m}^-\} &\approx \\ &\approx \sum_{k_{0,1}} \dots \sum_{k_{(m-1),m}} \frac{r_{0,1}^{k_{0,1}} \dots r_{(m-1),m}^{k_{(m-1),m}}}{k_{0,1}! \dots k_{(m-1),m}!} \prod_{v=0}^m F_{k_v}(\tilde{y}_{n+v}), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$F_{k_v}(\tilde{y}_v) = \begin{cases} \Phi_1^{\xi_{n+v}}(\tilde{y}_{n+v}), & \text{для } k_v = 0, \\ \frac{d^{k_v-1}}{dx_v^{k_v-1}} \{\Phi_1^{\xi_{n+v}}(y_{n+v})\}, & \text{для } k_v > 0. \end{cases}$$

Здесь, как и в работе [4], $\Phi_1^{\xi_{n+v}}(y)$ и $\phi_1^{\xi_{n+v}}(y)$ – одномерные интегральная функция распределения и плотность вероятности (ПВ) стандартизованной случайной величины $(\xi_{n+v} - v_{n+v})/\sigma_{n+v}$; $v_{n+v} = \langle \xi(x_{n+v}) \rangle$ и $\sigma_{n+v}^2 = \langle \xi^2(x_{n+v}) \rangle - \langle \xi(x_{n+v}) \rangle^2$ – математическое ожидание и дисперсия отсчета профиля поверхности в точке x_{n+v} ; $\tilde{y}_{n+v} = (y_{n+v} - v_{n+v})/\sigma_v$ – стандартизованный отсчет луча; $\{r_{i,j}\}_{i=0,m}^{j=0,m}$ – симметричная матрица коэффициентов корреляции отсчетов профиля в точках x_{n+i} и x_{n+j} , а индексы суммирования – суть элементы верхней треугольной матрицы $\{k_{i,j}\}_{i=0,(m-1)}^{j=(i+1),m}$, принимающие целые неотрицательные значения из области

$$0 \leq \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m k_{i,j} \leq K; \quad k_v = \sum_{i=1}^{v-1} k_{i,v} + \sum_{i=v+1}^m k_{v,i}.$$

Вычисление членов последовательности $P\{C_{n+1}^-\}$ ($n = 1, 2, \dots$) продолжается до тех пор, пока выполняются все перечисленные ниже критерии:

$$|1 - P\{E_{(n+1-M),M}^-\}/P\{E_{(n+1-M),(M-1)}^-\}| > \epsilon_2$$

– тест интегральных функций распределения;

$$P\{C_{n+1}^-\}/P\{C_0^-\} > q_{\min}$$

– тест наименьшей вероятности отсутствия затенения;

$$n \leq N_{\max}(\alpha)$$

– тест наибольшего числа итераций.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ РЯДОМ РАЙСА

Пусть дополнительно одномерный профиль поверхности $\xi(x)$ дифференцируемый в среднем квадратичном – случайный процесс. Тогда вероятность отсутствия затенений луча может быть представлена знакочередующимся рядом Райса [2]

$$\begin{aligned} q_\infty(x_0, y_0) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_{x_0}^{+\infty} dx_m \int_{x_0}^{+\infty} dx_{m-1} \dots \times \\ &\times \int_{x_0}^{+\infty} \phi_m^+(x_1, \dots, x_m | x_0, y_0) dx_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь условная плотность вероятности $\phi_m^+(x_1, \dots, x_m | x_0, y_0)$, симметрична относительно аргументов x_1, \dots, x_m , определяет вероятность $\phi_m^+(x_1, \dots, x_m | x_0, y_0) dx_1 \dots dx_m$ одновременно наблюдать хотя бы по одному пересечению луча $y(x)$ снизу вверх на пространственных интервалах $(x_1, x_1 + dx_1), \dots, (x_m, x_m + dx_m)$ при условии, что было зафиксировано пересечение луча сверху вниз на интервале $(x_0, x_0 + dx_0)$ на высоте y_0 . Ее общее выражение, приведенное в монографии [3], целесообразно представить в модифицированном виде

$$\begin{aligned} \phi_m^+(x_1, \dots, x_m | x_0, y_0) &= f_m(\vec{Y}) I_m^+(\vec{Y}) / I_0^-(y_0); \\ I_0^-(y_0) &= \int_{-\infty}^{\operatorname{tg} \alpha} (\operatorname{tg} \alpha - z_0) \vartheta_1^{\xi_0^{(1)}}(z_0 | y_0) dz_0; \quad I_m^+(\vec{Y}) = \\ &= \int_{-\infty}^{\operatorname{tg} \alpha} (\operatorname{tg} \alpha - z_0) dz_0 \int_{-\infty}^{\operatorname{tg} \alpha} (z_1 - \operatorname{tg} \alpha) dz_1 \dots \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\operatorname{tg} \alpha} (z_m - \operatorname{tg} \alpha) \vartheta_{m+1}(z_0, \dots, z_m | \vec{Y}) dz_m, \end{aligned} \quad (6)$$

где $f_m(\vec{Y}) = \phi_m(y_1, \dots, y_m | y_0)$ – значение условной плотности вероятности отсчетов случайного профиля поверхности ξ_1, \dots, ξ_m в точке $\xi_1 = y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) \operatorname{tg} \alpha, \dots, \xi_m = y_m = y_0 + (x_m - x_0) \operatorname{tg} \alpha$ при условии, что $\xi_0 = y_0$; $\vec{Y} = (y_0, \dots, y_m)$ – вектор дискретизации профиля; $\vartheta_{m+1}(z_0, \dots, z_m | \vec{Y})$ – условная плот-

ность вероятности отсчетов первых производных профиля поверхности $d\xi(x_0)/dx, \dots, d\xi(x_m)/dx$ при условии, что $\xi_0 = y_0, \dots, \xi_m = y_m$.

Получим ковариационное приближение вероятности отсутствия затенений луча случайнм гауссовским профилем поверхности. Пусть $S(u_1, u_2)$ – ковариационная функция профиля, а $\Sigma_{m+1} = \{\sigma_{i,j}\}_{i=0,m}^{j=0,m}$ – ковариационная матрица его отсчетов ξ_0, \dots, ξ_m в дискретных точках x_0, \dots, x_m . Очевидно, что

$$\begin{aligned}\sigma_{i,j} &= S(x_i, x_j) = \langle \xi(x_i) \xi(x_j) \rangle - v_i v_j; \\ \sigma_i^2 &= \sigma^2(x_i) = \sigma_{i,i}; \quad v_i = v(x_i) = \langle \xi(x_i) \rangle.\end{aligned}$$

Матрицу Σ_{m+1} представим в блочной форме

$$\Sigma_{m+1} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \vec{\sigma}_{1,0}^T \\ \vec{\sigma}_{1,0} & \Sigma_m \end{bmatrix},$$

где $\vec{\sigma}_{1,0}^T = (\sigma_{1,0}, \dots, \sigma_{m,0})$, а Σ_m – ковариационная матрица случайных величин ξ_1, \dots, ξ_m . Тогда для гауссовского профиля условное распределение $\Phi_m(y_1, \dots, y_m|y_0)$ будет также нормальным с вектором средних $\vec{N}(\vec{Y}) = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m)^T = (v_1, \dots, v_m)^T + \vec{\sigma}_{1,0}(y_0 - v_0)/\sigma_0^2$ и ковариационной матрицей $\vec{\Sigma}(\vec{Y}) = \Sigma_m - \vec{\sigma}_{1,0} \vec{\sigma}_{1,0}^T / \sigma_0^2$ [7]. Далее

$$\begin{aligned}f_m(\vec{Y}) &= \\ &= (2\pi)^{-m/2} |\det\{\vec{\Sigma}_m(\vec{Y})\}|^{-1/2} \exp\{-D_m^2(\vec{Y})/2\}.\end{aligned}\quad (7)$$

Здесь расстояние Махalanобиса для вектора $\vec{Y}_1 = (y_1, \dots, y_m)^T$ отсчетов луча в дискретных точках x_1, \dots, x_m вычисляется по формуле

$$D_m^2(\vec{Y}) = (\vec{Y}_1 - \vec{N}(\vec{Y}))^T \vec{\Sigma}_m^{-1}(\vec{Y}) \{ \vec{Y}_1 - \vec{N}(\vec{Y}) \}.$$

Условное распределение $\Phi_{m+1}(z_0, \dots, z_m|\vec{Y})$ первых производных гауссовской случайной функции будет, как известно [8], также гауссовским с вектором средних

$$\begin{aligned}(\hat{\mu}_0, \dots, \hat{\mu}_m)^T &= (\mu_0, \dots, \mu_m)^T + \\ &+ \Sigma_{01} \Sigma_{m+1}^{-1} (y_0 - v_0, \dots, y_m - v_m)^T\end{aligned}$$

и ковариационной матрицей $\hat{\Sigma} = \{\hat{\sigma}_{i,j}\}_{i=0,m}^{j=0,m} = \Sigma_{11} - \Sigma_{01} \Sigma_{m+1}^{-1} \Sigma_{01}^T$ [7]. Здесь $\mu_v = \mu(x_v) = dv(x_v)/dx$ – отсчет производной среднего профиля поверхности в точках x_v ; $\Sigma_{01} = \{\epsilon_{i,j} = \langle \xi^{(1)}(x_i) \xi(x_j) \rangle - \mu(x_i) v(x_j)\}_{i=0,m}^{j=0,m}$ – матрица взаимных ковариаций профиля по-

верхности и его производной; $\Sigma_{11} = \{\zeta_{i,j} = \langle \xi^{(1)}(x_i) \xi^{(1)}(x_j) \rangle - \mu(x_i) \mu(x_j)\}_{i=0,m}^{j=0,m}$ – ковариационная матрица первой производной профиля

$$\begin{aligned}\epsilon_{i,j} &= \epsilon(x_i, x_j) = \partial S(u_1, u_2) / \partial u_1 \Big|_{u_1=x_i, u_2=x_j}; \\ \zeta_{i,j} &= \zeta(x_i, x_j) = \partial^2 S(u_1, u_2) / \partial u_1 \partial u_2 \Big|_{u_1=x_i, u_2=x_j}.\end{aligned}$$

Разложение распределения $\Phi_{m+1}(z_0, \dots, z_m|\vec{Y})$ в ряд по тетрахорическим функциям имеет вид [9]

$$\begin{aligned}\Phi_{m+1}(z_0, \dots, z_m|\vec{Y}) &= \\ &= \sum_{k_{0,1}} \dots \sum_{k_{(m-1),m}} \frac{\rho_{0,1}^{k_{0,1}} \dots \rho_{(m-1),m}^{k_{(m-1),m}}}{k_{0,1}! \dots k_{(m-1),m}!} \prod_{v=0}^m \left\{ \frac{\varphi(\hat{z}_v)}{\hat{\sigma}_v} H_{k_v}(\hat{z}_v) \right\}.\end{aligned}$$

Здесь $\hat{\sigma}_v^2 = \hat{\sigma}_{v,v}^2$ и $\rho_{i,j} = \hat{\sigma}_{i,j}/(\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j)$ – условные дисперсия отсчета производной профиля $\xi^{(1)}(x_v)$ и коэффициент корреляции отсчетов производной профиля $\xi^{(1)}(x_i)$ и $\xi^{(1)}(x_j)$ при условии, что $\xi_0 = y_0, \dots, \xi_m = y_m$; $\hat{z}_v = (\hat{x}_v - \hat{\mu}_v)/\hat{\sigma}_v$ – стандартизованный аргумент; $\varphi(z)$ – стандартизованная нормальная одномерная ПВ; $H_k(z)$ – полином Чебышева–Эрмита степени k с весовой функцией $\varphi(z)$. Интегрирование полученного ряда по формуле (6) дает разложение в ряд функции

$$\begin{aligned}I_m^+(\vec{Y}) &= \sum_{k_{0,1}} \dots \sum_{k_{(m-1),m}} \frac{\rho_{0,1}^{k_{0,1}}(\vec{X}) \dots \rho_{(m-1),m}^{k_{(m-1),m}}(\vec{X})}{k_{0,1}! \dots k_{(m-1),m}!} \times \\ &\times \hat{\sigma}_0(\vec{X}) W_{k_0} \{ \hat{a}_0(\vec{X}) \} \prod_{v=1}^m \hat{\sigma}_v(\vec{X}) V_{k_v}(\hat{a}_v(\vec{X})),\end{aligned}\quad (8)$$

где

$$W_k(\hat{a}) = \begin{cases} \varphi(\hat{a}) + \hat{a}\Phi(\hat{a}) & \text{при } k = 0, \\ -\Phi(\hat{a}) & \text{при } k = 1, \\ H_{k-2}(\hat{a})\varphi(\hat{a}) & \text{при } k \geq 2; \end{cases}$$

$$V_k(\hat{a}) = \begin{cases} \varphi(\hat{a}) + \hat{a}[1 - \Phi(\hat{a})] & \text{при } k = 0, \\ 1 - \Phi(\hat{a}) & \text{при } k = 1, \\ H_{k-2}(\hat{a})\varphi(\hat{a}) & \text{при } k \geq 2, \end{cases}$$

$\hat{a}_v = (\tan \alpha - \hat{\mu}_v)/\hat{\sigma}_v$ – стандартизованный аргумент; $\Phi(a)$ – интеграл вероятностей [4], а $\vec{X} = (x_0, \dots, x_m)$ – вектор абсцисс дискретизации профиля поверхности.

3. АППРОКСИМАЦИЯ ПО УЧАСТКАМ

Количественным критерием роли эффекта затенений поверхности при отражении волн являются значения параметров $\hat{a}_v(\vec{X})$, ($v = 0, 1, \dots, m$) [2]. В случае *слабых* затенений, когда $\hat{a}_v(\vec{X}) \gg 1$, условная вероятность $\phi_1^+(x_1|x_0, y_0)dx_1$ наблюдать *однократное* пересечение луча снизу вверх на пространственном интервале $(x_1, x_1 + dx_1)$ отлична от нуля при $x_1 - x_0 < \Delta_1$, где Δ_1 – интервал корреляции поверхности в точке $x = x_1$. В то же время значения условных вероятностей $\phi_m^+(x_1, \dots, x_m|x_0, y_0)dx_1\dots dx_m$ *многократных* пересечений луча ($m \geq 2$) на пространственных интервалах $(x_1, x_1 + dx_1), \dots, (x_m, x_m + dx_m)$ будут пренебрежимо малыми. Иными словами, вероятность отсутствия затенений близка к единице, и в разложении (5) можно ограничиться первым членом суммы ($m = 1$). Условия ПВ (7) в этом случае – суть гауссона

$$f_1(y_0, y_0 + (x_1 - x_0)\operatorname{tg}\alpha) = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\pi}} \exp \left[-\gamma_0^2 \times \right. \\ \left. \times \left\{ (x_1 - x_0)\operatorname{tg}\alpha + y_0 - v_1 - r_{1,0} \frac{\sigma_1}{\sigma_0} (y_0 - v_0) \right\}^2 \right],$$

стремящаяся к дельта-функции при $x_1 \rightarrow x_0$, так как $r_{1,0}^2 \rightarrow 1$ и $\gamma_0 = \sigma_1^{-1} \{2(1 - r_{1,0}^2)\}^{-1/2} \rightarrow +\infty$. Далее ковариационное приближение (8) приобретает вид

$$I_1^+(y_0, y_1) = \widehat{\sigma}_0(x_0, x_1) \widehat{\sigma}_1(x_0, x_1) \sum_{k=0}^K \frac{\rho_{0,1}^k(x_0, x_1)}{k!} \times \\ \times W_k \left\{ \frac{\operatorname{tg}\alpha - \widehat{\mu}_0(x_0, x_1)}{\widehat{\sigma}_0(x_0, x_1)} \right\} V_k \left\{ \frac{\operatorname{tg}\alpha - \widehat{\mu}_1(x_0, x_1)}{\widehat{\sigma}_1(x_0, x_1)} \right\}.$$

Подстановка полученных выражений в формулу (5) дает ковариационную оценку вероятности отсутствия затенений

$$q_\infty(x_0, y_0) = 1 - \frac{1}{I_0^-(y_0)} \sum_{k=0}^K \frac{1}{k!} Q_k(x_0, y_0), \\ Q_k(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{+\infty} \widehat{\sigma}_0(x_0, x_1) \widehat{\sigma}_1(x_0, x_1) \rho_{0,1}^k(x_0, x_1) \times \\ \times W_k \left\{ \frac{\operatorname{tg}\alpha - \widehat{\mu}_0(x_0, x_1)}{\widehat{\sigma}_0(x_0, x_1)} \right\} V_k \left\{ \frac{\operatorname{tg}\alpha - \widehat{\mu}_1(x_0, x_1)}{\widehat{\sigma}_1(x_0, x_1)} \right\} \times \\ \times f_1(x_0, y_0 + (x_1 - x_0)\operatorname{tg}\alpha) dx_1.$$

В случае *сильных* затенений, когда $\hat{a}_v(\vec{X}) \ll 1$, вероятность их отсутствия близка к нулю. Пространственные интервалы $(x_1, x_1 + dx_1), \dots, (x_m, x_m + dx_m)$, на которых в основном и происходят пересечения поверхности лучом, будут таковы, что $x_1 - x_0 > \Delta_1, \dots, x_m - x_0 > \Delta_m$. Иными словами, статистические связи в условной плотности вероятности $\phi_m^+(x_1, \dots, x_m|x_0, y_0)$ можно не учитывать, т.е. принять диагональными ковариационные матрицы $\Sigma_{m+1}^{-1}; \Sigma_{01}; \Sigma_{11}$. Тогда из выражений (7) и (8) нетрудно получить предельные равенства

$$f_m(\vec{Y}) = \prod_{v=1}^m \Phi\{\tilde{y}(x_v)\}/\sigma(x_v);$$

$$\tilde{y}(x_v) = \{y(x_v) - v(x_v)\}/\sigma(x_v);$$

$$I_m^+(\vec{Y}) = I_0^-(y_0) \prod_{v=1}^m I_v^+(y_v);$$

$$I_v^+(y_v) = \int_{\operatorname{tg}\alpha}^{+\infty} (z_v - \operatorname{tg}\alpha) \vartheta_1^{\xi_v^{(1)}}(z_v|y_v) dz_v;$$

$$I_v^+(y_v) = \widehat{\sigma}_\infty(x_v) \times \\ \times (\Phi\{\widehat{a}_\infty(x_v)\} - \widehat{a}_\infty(x_v)[1 - \Phi\{\widehat{a}_\infty(x_v)\}]);$$

$$I_0^-(y_0) = \widehat{\sigma}_\infty(x_0)(\Phi\{\widehat{a}_\infty(x_0)\} + \widehat{a}_\infty(x_0)\Phi\{\widehat{a}_\infty(x_0)\}),$$

где $\widehat{a}_\infty(x) = \{\operatorname{tg}\alpha - \widehat{\mu}_\infty(x)\}/\widehat{\sigma}_\infty(x)$ – стандартизованный аргумент, а $\widehat{\mu}_\infty(x) = \mu(x) + \epsilon(x, x)\{y(x) - v(x)\}/\sigma^2(x)$ и $\widehat{\sigma}_\infty^2(x) = \zeta(x, x) - \epsilon(x, x)/\sigma^2(x)$ – условные математическое ожидание и дисперсия производной случайного профиля поверхности $\xi^{(1)}(x)$ в текущей точке x при условии, что $\xi(x) = y(x)$. Подстановка полученных равенств в формулу (6) и интегрирование в соответствии с разложением в ряд по факториальным моментам (5) дает оценку

$$q_\infty(x_0, y_0) = \exp \left\{ - \int_{x_0}^{+\infty} \phi_\infty^+(x|x_0, y_0) dx \right\};$$

$$\phi_\infty^+(x|x_0, y_0) = \frac{\widehat{\sigma}_\infty(x)}{\sigma(x)} \Phi \left\{ \frac{y_0 + (x - x_0)\operatorname{tg}\alpha - v(x)}{\sigma(x)} \right\} \times \\ \times (\Phi\{\widehat{a}_\infty(x)\} + \widehat{a}_\infty(x)\Phi\{\widehat{a}_\infty(x)\}).$$

Функция $\phi_\infty^+(x|x_0, y_0)$ пространственной координаты профиля поверхности характеризует скорость сходимости вероятности отсутствия затенений к нулю при $\operatorname{tg}\alpha \rightarrow 0$.

Таблица 1. Статистики профиля и его перепадов

Моменты	МО	СКО	Асимметрия	Эксцесс	Минимум	Максимум
Профиль	1.6882	0.3133	0.0537	1.4471	0	3.465
Перепад $\tilde{y} = -1$	12.316	6.2759	0.7854	2.075	0.125	39.555
Перепад $\tilde{y} = -0.5$	15.17	8.2665	1.9932	8.842	0.0293	76.371
Перепад $\tilde{y} = 0$	22.294	14.197	3.3242	17.766	0.4441	146.83
Перепад $\tilde{y} = 0.5$	39.9	35.735	4.2079	30.952	1.0278	434.92
Перепад $\tilde{y} = 1$	76.357	123.28	9.9832	142.45	0.041	1949.3

В случае *средних* значений, когда $\hat{a}_v(\vec{X}) \approx 1$, вероятность их отсутствия можно оценить двумя первыми членами суммы (5)

$$q_\infty(x_0, y_0) = 1 - \int_{x_0}^{+\infty} \phi_1^+(x_1 | x_0, y_0) dx_1 + \\ + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{+\infty} dx_2 \int_{x_0}^{+\infty} \phi_2^+(x_1, x_2 | x_0, y_0) dx_1,$$

где подынтегральные функции рассчитываются в соответствии с формулами (6)–(8). В этом случае вычислительные затраты, связанные с численным интегрированием условных распределений $\phi_1^+(x_1 | x_0, y_0)$ и $\phi_2^+(x_1, x_2 | x_0, y_0)$, например с помощью аддитивных кубатурных алгоритмов [10], будут вполне приемлемыми.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Свойства интерполяционной оценки вероятности отсутствия затенений луча были исследованы

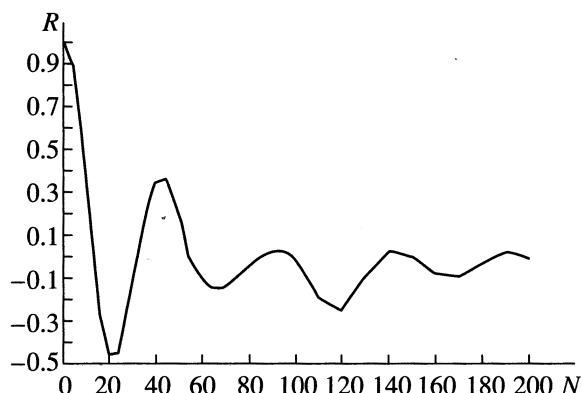


Рис. 1. Зависимость коэффициента корреляции R от лага N профиля однородной случайной поверхности.

для экспериментальных данных в виде реализации одномерного профиля однородной в широком смысле случайной поверхности. Выборочные оценки математического ожидания (МО) – v , среднего квадратического отклонения (СКО) – σ , асимметрии и эксцесса одномерного распределения $\phi_1^\xi(y)$ профиля, а также его наименьшее (минимум) и наибольшее (максимум) значения представлены в табл. 1. Объем выборки составлял 33649 дискрет. В качестве непараметрической оценки ПВ $\phi_1^\xi(y)$ применяли гистограмму, сглаженную сдвигом (Averaged Shifted Histogram – ASH) [11] с количеством суженных разрядных интервалов, равным 16×10 . ASH-оценка практически совпадала с нормальным распределением, характеристики положения и масштаба которого – суть выборочные значения из табл. 1. Иными словами, принималась гипотеза о нормальности случайного профиля. Смешенная выборочная оценка коэффициента корреляции R профиля представлена на рис. 1. Корреляционный лаг N измерялся в количестве интервалов дискретизации профиля, а его интервал корреляции составил порядка 200 дискрет. Абсцисса x_0 точки пересечения луча с поверхностью, в силу допущения о ее однородности, принималась равной нулю. Нормированный шаг $\Delta\tilde{x} = \Delta x / \sigma$ дискретизации профиля при вычислении стандартизованных отсчетов луча $\tilde{y}_n = \tilde{y}_0 + n\Delta\tilde{x}\operatorname{tg}\alpha$, где $\tilde{y}_0 = (y_0 - v)/\sigma$, варьировался в соответствии с равенством $\Delta\tilde{x}(\alpha_0) = 6/(N_0 \operatorname{tg}\alpha_0)$. Здесь N_0 – средняя протяженность пространственных интервалов между нулями профиля, выраженная в количестве интервалов его дискретизации, а α_0 – масштаб, имеющий смысл среднего угла наклона профиля. Связность интерполяционной оценки принималась равной шести ($M = 6$). Соответственно ковариационное приближение (4) семимерной интегральной функции распределения

Таблица 2. Параметры аппроксимации индикатрисы

\tilde{y}	S	$E \times 10^2$	u	v	w
-1	12	47.6	3.14e + 08	4.47e + 05	1.99e - 04
-0.75	10	23.78	5.79e + 06	-5.44e + 06	-0.214
-0.5	8	22.34	5.68e + 06	-5.66e + 06	-0.17
-0.25	9	8.912	2.29e + 06	-2.46e + 06	-0.115
0	10	8.355	5.35e + 06	-7.42e + 06	-0.084
0.25	20	13.74	2.62e + 05	-3.88e + 05	-0.0278
0.5	25	7.71	3.62e + 06	-7.15e + 06	-8.72e - 03
0.75	25	5.117	1.29e + 07	4.16e + 02	6.79e - 08
1	25	16.07	1.14e + 07	2.14e + 06	2.24e - 04

Примечание. Параметры моделирования: $M = 6$; $K = 2$; $N_0 = 22$; $\alpha_0 = 27^\circ$.

ния профиля ограничивалось квадратичной аппроксимацией ($K = 2$). Шаг интерполяции S , выраженный в количестве интервалов дискретизации профиля, принимался равным значению, оптимальному в смысле минимума абсолютной невязки E между ASH- и SPE-оценками* распределения протяженности отрицательных выбросов (перепадов) случайного профиля [4] над постоянным нормированным порогом \tilde{y}_0 . Критерии продолжения рекуррентной процедуры вычисления вероятностей гипотез $P\{C_{n+1}^-\}$ принимали следующие значения: $\varepsilon_2 = 10^{-5}$; $q_{\min} = 10^{-10}$; $N_{\max}(\alpha) = 150$. Оптимальные настраиваемые параметры сглаживания интерполяционной оценки вероятности отсутствия затенений, а также фиксированные параметры и соответствующие им характеристики перепадов представлены в табл. 2. На рис. 2 представлено семейство индикатрис $q_\infty(0, \tilde{y}_0 | \alpha)$ вероятности отсутствия затенений для различных значений стандартизированной высоты \tilde{y}_0 точки пересечения луча с поверхностью. В задачах теоретической фотометрии такого рода индикатрисы удобно описывать функцией

$$\hat{q}_\infty(0, \tilde{y}_0 | \alpha) = \\ = \left[1 + w(\tilde{y}_0) \left\{ 1 + \frac{u(\tilde{y}_0) \cos \alpha}{\cos \alpha + v(\tilde{y}_0) \sin \alpha} \right\} \operatorname{ctg} \alpha \right]^{-1}. \quad (9)$$

Значения параметров $u(\alpha)$, $v(\alpha)$ и $w(\alpha)$, оптимальные по критерию минимума среднеквадратической ошибки аппроксимации интерполяционной оценки $q_\infty(0, \tilde{y}_0 | \alpha)$ выражением (9), также представлены в табл. 2. Результат усреднения индика-

* Semiparametrical estimation (SPE).

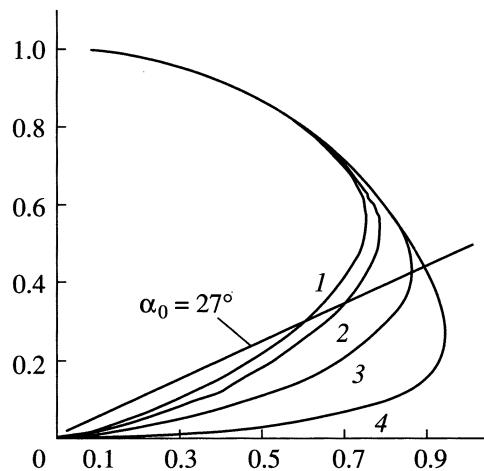


Рис. 2. Индикатрисы вероятности $q_\infty(0, \tilde{y}_0 | \alpha)$: $\tilde{y}_0 = -1$ (1), -0.5 (2), 0 (3), 0.5 (4).

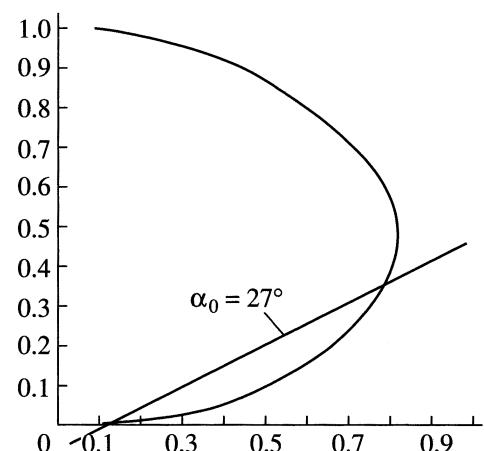


Рис. 3. Индикатриса вероятности $q_\infty(0 | \alpha)$, усредненная по стандартизованным гауссовским высотам \tilde{y}_0 .

трист $\hat{q}_\infty(0, \tilde{y}_0 | \alpha)$ по стандартизованному гауссовскому распределению $\phi(\tilde{y}_0)$ представлен на рис. 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получена интерполяционная оценка и ковариационное приближение ряда Райса для вероятности затенений луча случайнм профилем шероховатой поверхности. Представлен анализ случаев слабых, средних и сильных затенений. В качестве параметров сглаживания оценки выступают размеры интервалов интерполяции и связность дискретных отсчетов профиля по критерию ковариации. Модели обеспечивают приемлемые вычислительные затраты для достижения заданной точности оценки вероятности затенений луча как однородными, так и неоднородными случайными поверхностями.

Автор выражает благодарность Д.С. Лукину за внимание к работе и высказанные им ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Torrance K.E., Sparrow E.M. // JOSA. 1967. V. 57. № 9. P. 1105.
2. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972.
3. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970.
4. Лабунец Л.В. // РЭ. 2000. Т. 45. № 12. С. 1459.
5. Фомин Я.А. Теория выбросов случайных процессов. М.: Связь, 1980.
6. Лабунец Л.В. // Труды МВТУ: Вопросы проектирования кибернетических устройств. М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1987. Вып. 493. С. 3.
7. DeGroot M.H. Optimal Statistical Recisions. New York: McGraw – Hill Company, 1970.
8. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных не-гауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.
9. Dutt J.E. // Biometrika. 1973. V. 60. № 3. P. 637.
10. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. Computer Methods for Mathematical Computations. New York: Prentide Hall, 1977.
11. Scott D.W. Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization. New York: J. Wiley and Sons, 1992.