

ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
ДЛИТЕЛЬНОСТИ ВЫБРОСОВ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

© 2000 г. Л. В. Лабунец

Поступила в редакцию 19.06.2000 г.

Предложен интерполяционный метод оценивания и соответствующее ему полупараметрическое представление распределения длительности выбросов нестационарного негауссовского случайного процесса. В качестве параметра сглаживания оценки выступают интервалы интерполяции и связность дискретных отсчетов временного ряда по критерию ковариации. Получены выражения для вероятностей гипотез полупараметрической оценки, а также выражения для старших членов ряда Райса. Указанные результаты обеспечивают разумный компромисс между приемлемыми вычислительными затратами и погрешностью оценки распределения длительности выбросов широкого класса случайных процессов. Для экспериментальных данных сопоставлены выборочные и интерполяционные оценки распределения длительности выбросов.

## ВВЕДЕНИЕ

В комплексе проблем теории случайных процессов некоторые задачи, представляющие значительный практический интерес, все еще не получили окончательного решения. К их числу относится проблема вычисления характеристик выбросов случайных процессов и, в частности, оценки распределения длительности выбросов. К настоящему времени единственным точным и универсальным методом решения этой задачи для дифференцируемых в среднем квадратичном процессе самого общего вида является разложение плотности вероятности длительности выбросов в ряды Райса [1] и Лонге-Хиггинс [2], т.е. в ряды по факториальным моментам числа пересечений процесса с заданным уровнем. Точная формула для числа пересечений уровня гауссовским случайнм процессом впервые была получена Беляевым [3]. Однако такого рода оценки связаны со значительными, а подчас и непреодолимыми, вычислительными затратами. Неудивительно поэтому, что в последние несколько десятилетий значительное внимание уделялось созданию новых методов исследования выбросов. В обширной литературе по этому предмету упомянем прежде всего методы, разработанные Крамером [4], Стратоновичем [5], Тихоновым [6], Питербаргом [7], Мирошиным [8]. Наглядным и вместе с тем эффективным приближенным методом решения указанной задачи является *метод временной дискретизации*, впервые предложенный Лонге-Хиггинс [9] и в дальнейшем развитый в цикле работ Левиным и Фоминым (см. [10] и ссылки в ней). Полученные в последние годы оценки распределения длительности выбросов охватывают в основном случай стационарных процессов. Аналитические аппроксимации рас-

пределения известны для малых и больших длительностей выбросов, нулевого и высокого порога или в рамках двухсвязного приближения интегральной функции распределения гауссовского случайного процесса. На практике нередко приходится исследовать выбросы нестационарного и негауссовского процесса над произвольным порогом. Цель данной работы – восполнить, хотя бы отчасти, указанный пробел.

## 1. СИСТЕМА ГИПОТЕЗ В МЕТОДЕ ВРЕМЕННОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Реализацию непрерывного случайного процесса  $\xi(t)$  аппроксимируем интерполяционным приближением по его отсчетам  $\xi_n = \xi(t_n)$  в дискретные моменты времени  $t_n$  ( $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ ). В качестве интерполирующей функции выберем треугольную с текущей опорной областью, охватывающей каждые два соседних интервала интерполяции процесса. Аналогичным образом непрерывную детерминированную функцию  $x(t)$  аппроксимируем интерполяционным приближением по ее дискретным отсчетам  $x_n = x(t_n)$ . В этом случае длительность выброса процесса над функцией удобно анализировать в системе следующих случайных событий:

$$\begin{aligned} C_n: & \{\xi_{-1} \leq x_{-1}; \xi_0 > x_0; \dots; \xi_n > x_n\}; \\ D_n: & \{\xi_1 > x_1; \xi_2 > x_2; \dots; \xi_{n-1} > x_{n-1}; \xi_n \leq x_n\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Очевидно, что событие  $C_0$  фиксирует факт начала выброса во временном интервале  $[t_{-1}, t_0]$ , а событие  $D_n$  – факт его окончания во временном интервале  $[t_{n-1}, t_n]$ . Другими словами, вероятности гипотез попадания длительности выброса во временные интервалы  $[(t_{n-1} - t_0), (t_n - t_{-1})]$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) –

суть условные вероятности событий  $P\{D_n|C_0\} = p_n(t_0)$ . По формуле вычисления условных вероятностей нетрудно найти  $p_n(t_0) = (P\{C_{n-1}\} - P\{C_n\})/P\{C_0\}$ . Суммирование по интервалам интерполяции процесса дает

$$\sum_{m=1}^n p_m(t_0) = 1 - P\{C_n\}/P\{C_0\}. \quad (2)$$

Обозначим вероятность наблюдать выброс бесконечно большой длительности (т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{C_n\}/P\{C_0\}\} = p_\infty(t_0)$ ). Тогда, при  $n \rightarrow \infty$  ряд гипотез попадания длительности выброса во временные интервалы  $[(t_{n-1} - t_0), (t_n - t_0)]$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) образует полную группу событий

$$p_\infty(t_0) + \sum_{m=1}^{\infty} p_m(t_0) = 1.$$

Кроме того, из выражения (2) непосредственно следует рекуррентная формула

$$\begin{aligned} p_1(t_0) &= 1 - \frac{P\{C_1\}}{P\{C_0\}}; \quad p_{n+1}(t_0) = \\ &= 1 - \sum_{m=1}^n p_m(t_0) - \frac{P\{C_{n+1}\}}{P\{C_0\}} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3)$$

Ее эффективность для вычисления вероятностей последовательности гипотез относительно длительности выброса существенным образом зависит от возможности оценки многомерных интегралов вероятностей с погрешностью, приемлемой для практических приложений. Такую возможность доставляет ковариационное приближение многомерной плотности вероятности (ПВ) процесса, представленное в работе [11]:

$$\begin{aligned} \Phi_{m+1}^{(2)}(x_n, \dots, x_{n+m}) &= \\ &= \sum_{k_{0,1}} \dots \sum_{k_{(m-1),m}} \frac{b_{0,1}^{k_{0,1}} \cdot \dots \cdot b_{(m-1),m}^{k_{(m-1),m}}}{k_{0,1}! \cdot \dots \cdot k_{m,(m+1)}!} \times \\ &\times \prod_{v=0}^m \frac{d^{k_v+1}}{dx_{n+v}} \{\Phi_1^{\xi_{n+v}}(x_{n+v})\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\Phi_1^{\xi_{n+v}}(x_{n+v})$  – одномерная интегральная функция распределения случайной величины  $\xi_{n+v}$ ;  $b_{i,j}$  – ковариация случайных величин  $\xi_{n+i}$  и  $\xi_{n+j}$ , а индексы суммирования – суть элементы верхней треугольной матрицы  $\{k_{i,j}\}_{i=0, (m-1)}^{j=(i+1), m}$ , при-

нимающие целые неотрицательные значения из области

$$0 \leq \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m k_{i,j} \leq K; \quad k_v = \sum_{i=1}^{v-1} k_{i,v} + \sum_{i=v+1}^m k_{v,i}.$$

## 2. М-СВЯЗНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ГИПОТЕЗ

Моменты интерполяции  $t_n$  ( $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ ) выберем таким образом, чтобы ковариации отсчетов случайного процесса  $b_{i,j} \leq \epsilon$ , как только  $|i-j| > M$ , где  $\epsilon$  – достаточно малый уровень значимости, а  $M$  – натуральное число. Таким образом, в случайной последовательности ...,  $\xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots$  практически коррелированы лишь члены, отстоящие друг от друга не более чем на  $M$  интервалов интерполяции. Следуя терминологии монографии [10], будем называть такую последовательность *M-связной*.

Непосредственная проверка показывает, что выражение (4) удовлетворяет условию согласованности [12]. При  $b_{i,m} = 0$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ) в формуле (4) сохраняются лишь члены с нулевыми степенями ковариаций  $b_{i,m}$ . Из равенства индексов  $k_{i,m} = 0$  следует  $k_m = 0$ . Тогда ковариационное приближение многомерной плотности вероятности процесса приобретает вид

$$\begin{aligned} \Phi_{m+1}^{(2)}(x_n, \dots, x_{n+m}) &= \\ &= \Phi_m^{(2)}(x_n, \dots, x_{n+m-1}) \Phi_1^{\xi_{n+m}}(x_{n+m}). \end{aligned}$$

В этом равенстве  $\Phi_1^{\xi_{n+m}}(x_{n+m})$  – одномерная ПВ случайной величины  $\xi_{n+m}$ , а первый сомножитель – суть ковариационное приближение маргинальной плотности вероятности отсчетов  $\xi_n, \dots, \xi_{n+m-1}$ . В итоге для временных отсчетов процесса с индексами  $n+1 > M-1$  вероятность  $P\{C_{n+1}\}$  наблюдать выброс с длительностью, большей чем  $(t_{n+1} - t_{-1})$  рационально вычислять с помощью *M-связного* приближения

$$\begin{aligned} P\{C_{n+1}\} &= P\{C_{M-1}\} \times \\ &\times \prod_{m=M}^{n+1} P\{E_{(m-M), M}\} / P\{E_{(m-M), (M-1)}\} = \\ &= P\{C_n\} \frac{P\{E_{(n+1-M), M}\}}{P\{E_{(n+1-M), (M-1)}\}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь наряду с событиями (1) анализируются события

$$E_{n,m}: \{\xi_n > x_n; \xi_{n+1} > x_{n+1}; \dots; \xi_{n+m} > x_{n+m}\}, \quad (6)$$

связанные с попаданием дискретных отсчетов процесса в гиперквадранты  $(m+1)$ -мерного евклидова пространства. Вершины гиперквадрантов смещены в точки с координатами  $(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ .

Для временных отсчетов процесса с индексами  $n \leq M-1$  вероятности событий  $C_n$  могут быть также выражены через вероятности событий (6), а именно:

$$\begin{aligned} P\{C_0\} &= P\{E_{0,0}\} - P\{E_{-1,1}\}; \\ P\{C_1\} &= P\{E_{0,1}\} - P\{E_{-1,2}\}; \dots; P\{C_{M-1}\} = \\ &= P\{E_{0,M-1}\} - P\{E_{-1,M}\}. \end{aligned}$$

В результате расчет вероятностей последовательности гипотез  $p_n(t_0)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) относительно длительности выброса по формулам (3) и (5) сводится к оценке многомерных интегралов вероятностей размерности не более, чем  $(M+1)$ . Ковариационное приближение многомерного интеграла вероятностей [11] дает оценку

$$\begin{aligned} P\{E_{n,m}\} \approx \sum_{k_{0,1}} \dots \sum_{k_{(m-1),m}} \frac{b_{0,1}^{k_{0,1}} \dots b_{(m-1),m}^{k_{(m-1),m}}}{k_{0,1}! \dots k_{(m-1),m}!} \times \\ \times \prod_{v=0}^m G_{k_v}(x_{n+v}), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$G_{k_v}(x_v) = \begin{cases} 1 - \Phi_1^{\xi_{n+v}}(x_{n+v}) & \text{для } k_v = 0, \\ -\frac{d^{k_v-1}}{dx_v^{k_v-1}} \{\Phi_1^{\xi_{n+v}}(x_{n+v})\} & \text{для } k_v > 0. \end{cases}$$

### 3. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ОЦЕНКА

Кусочно-линейная интерполяция случайного процесса позволяет получить простую и вместе с тем эффективную оценку плотности распределения длительности выброса над детерминированной функцией. Очевидно, что с каждой из рассмотренных выше гипотез связана парциальная плотность вероятности  $\theta_n(t_0, \tau)$  распределения длительности выброса  $\tau$  во временном интервале  $[(t_{n-1} - t_0), (t_n - t_{-1})]$  ( $n=1, 2, \dots$ ). Другими словами, оценка плотности распределения длительности выброса представляет собой смесь парциальных плотностей

$$\hat{\theta}(t_0, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t_0) \theta_n(t_0, \tau). \quad (8)$$

Важно отметить, что в предложенном выше правиле интерполяции процесса выбор фиксирован-

ного значения связности  $M$  задает размеры интервалов интерполяции. Поэтому размеры интервалов интерполяции и связность приобретают смысл *параметров сглаживания оценки* [8]. В то же время априорная информация о статистических характеристиках процесса заключена в вероятностях гипотез  $p_n(t_0)$  и, возможно, в парциальных распределениях  $\theta_n(t_0, \tau)$ . Именно по этой причине оценку (8) необходимо классифицировать как полупараметрическую.

В самом простейшем случае парциальные распределения  $\theta_n(t_0, \tau)$  удобно интерпретировать как ядерные функции стандартной формы с конечными опорными областями в виде временных интервалов  $[(t_{n-1} - t_0), (t_n - t_{-1})]$  ( $n=1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} \theta_n(t_0, \tau) = \\ = \begin{cases} \frac{2}{t_n - t_{n-1} + t_0 - t_{-1}} \text{Ker} \left( \frac{\tau - t_{n-1} + t_0}{t_n - t_{n-1} + t_0 - t_{-1}} - 1 \right) \\ \text{для } t_{n-1} - t_0 \leq \tau \leq t_n - t_{-1}, \\ 0 \text{ для } t_{n-1} - t_0 > \tau \cup \tau > t_n - t_{-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Различные типы ядер  $\text{Ker}(t)$ , широко распространенные в практических приложениях, приведены в табл. 1. Рациональным выбором целого класса ядер является симметричное бета-распределение вида [13]

$$\text{Ker}(t) = \begin{cases} \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1} k!} (1-t^2)^k & \text{для } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{для } |t| > 1, \end{cases}$$

где  $(2k+1)!! = (2k+1)(2k-1) \cdot \dots \cdot 5 \times 3 \times 1$ . При  $k=0$  получим прямоугольное ядро и, соответственно, гистограммную оценку плотности распределения длительности выброса [14, 15]. При  $k=1$  получим ядро Епанечникова, а также его дважды или трижды взвешенные аналоги при  $k=2$  или  $k=3$  соответственно. Наконец, для значений  $k \rightarrow \infty$  получим ядро, асимптотически приближающееся к гауссовскому.

По мере увеличения сложности оценки (8) в качестве парциальных можно выбрать специальный тип вероятностных распределений с конечной опорной областью. В системе распределений Пирсона удобным в этом отношении является бета-распределение

$$\begin{aligned} \theta_n(t_0, \tau) = \\ = \begin{cases} \frac{\Gamma(g_n + h_n + 2)}{\Gamma(g_n + 1)\Gamma(h_n + 1)} \frac{(\tau - t_{n-1} + t_0)^{g_n} (t_n - t_{-1})^{h_n}}{(t_n - t_{n-1} + t_0 - t_{-1})^{g_n + h_n + 1}} \\ \text{для } t_{n-1} - t_0 \leq \tau \leq t_n - t_{-1}, \\ 0 \text{ для } t_{n-1} - t_0 > \tau \cup \tau > t_n - t_{-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таблица 1. Типы ядерных функций

Ядро	$\text{Ker}(t^2)$	$\mu_{N-1}$
Равномерное	1	$N^{-1}$
Треугольное	$1 -  t $	$\{N(N+1)\}^{-1}$
Епанечникова	$1 - t^2$	$2\{N(N+2)\}^{-1}$
Дважды взвешенное	$(1 - t^2)^2$	$8\{N(N+2)(N+4)\}^{-1}$
Трижды взвешенное	$(1 - t^2)^3$	$48\{N(N+2)(N+4)(N+6)\}^{-1}$
Нормальное	$\exp(-t^2/2)$	$2^{\frac{N}{2}-1} \Gamma(N/2)$

Примечание.  $\text{Ker}(t^2) = 0$  для  $|t| > 1$ .

В этом случае его параметры  $g_n > -1$  и  $h_n > -1$  рациональнее оценивать методом моментов [16]

$$g_n = \frac{b_{n,1} - t_{n-1} + t_0 + \langle \tau_n \rangle}{b_{n,2}(t_n - t_{n-1} + t_0 - t_{-1})};$$

$$h_n = \frac{t_n - t_{-1} + \langle \tau_n \rangle - b_{n,1}}{b_{n,2}(t_n - t_{n-1} + t_0 - t_{-1})};$$

$$b_{n,1} = -\frac{\sigma_n(\beta_{n,2} + 3)\sqrt{\beta_{n,1}}}{10\beta_{n,2} - 12\beta_{n,1} - 18};$$

$$b_{n,2} = -\frac{2\beta_{n,2} - 3\beta_{n,1} - 6}{10\beta_{n,2} - 12\beta_{n,1} - 18}.$$

Здесь  $\beta_{n,1} = \gamma_{n,3}^2$  и  $\beta_{n,2} = \gamma_{n,4} + 3$  – параметры системы распределений Пирсона, а

$$\sigma_n = \sqrt{\langle \tau_n^2 \rangle - \langle \tau_n \rangle^2};$$

$$\gamma_{n,3} = (\langle \tau_n^3 \rangle - 3\langle \tau_n \rangle \langle \tau_n^2 \rangle + 2\langle \tau_n \rangle^3)/\sigma_n^3;$$

$$\gamma_{n,4} = (\langle \tau_n^4 \rangle - 4\langle \tau_n \rangle \langle \tau_n^3 \rangle +$$

$$+ 6\langle \tau_n \rangle^2 \langle \tau_n^2 \rangle - 3\langle \tau_n \rangle^4)/\sigma_n^4 - 3$$

– среднее квадратическое отклонение и кумулятивные коэффициенты третьего и четвертого порядков парциального распределения  $\theta_n(t_0, \tau)$ , выраженные соответственно через его первые четыре начальных момента  $\langle \tau_n^k \rangle$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ).

Для треугольной интерполирующей функции процесса приближение длительности выбросов  $\tau_n$  в  $n$ -й гипотезе представляет собой детерминированную функцию дискретных отсчетов процесса  $\xi_{-1}, \xi_0, \xi_{n-1}, \xi_n$ . Ее вид нетрудно получить, определяя абсциссы точек пересечения отрезков прямых, интерполирующих процесс и пороговую функцию на временных интервалах соответственно начала

выброса  $[t_{-1}, t_0]$  и его окончания  $[t_{n-1}, t_n]$ . В результате получим

$$\tau_n(\xi_{-1}, \xi_0, \xi_{n-1}, \xi_n) = \frac{(\xi_{n-1} - x_{n-1})t_n + (x_n - \xi_n)t_{n-1}}{\xi_{n-1} - x_{n-1} + x_n - \xi_n} - \frac{(x_{-1} - \xi_{-1})t_0 + (\xi_0 - x_0)t_{-1}}{x_{-1} - \xi_{-1} + \xi_0 - x_0}.$$

В соответствии с правилом статистического усреднения детерминированной функции случайных аргументов получим оценки начальных моментов парциального распределения  $\theta_n(t_0, \tau)$  из следующего выражения:

$$\langle \tau_n^k \rangle = \begin{cases} \int_{x_{-1}}^{x_{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_{-1} \int_{x_0}^{x_1} dy_0 \int_{-\infty}^{x_1} \tau_1^k(y_{-1}, y_0, y_1) \Phi_3(y_{-1}, y_0, y_1) dy_1 \\ \text{для } n = 1, \\ \int_{x_{-1}}^{x_{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_{-1} \int_{x_0}^{x_{n-1}} dy_0 \int_{x_{n-1}}^{x_n} dy_{n-1} \int_{-\infty}^{x_n} \tau_n^k(y_{-1}, y_0, y_{n-1}, y_n) \times \\ \times \Phi_4(y_{-1}, y_0, y_{n-1}, y_n) dy_n \text{ для } n > 1, \end{cases}$$

где  $\Phi_3(y_{-1}, y_0, y_1)$  и  $\Phi_4(y_{-1}, y_0, y_{n-1}, y_n)$  – соответственно трехмерная и четырехмерная плотности вероятности дискретных отсчетов процесса  $\xi_{-1}, \xi_0, \xi_{n-1}, \xi_n$ .

#### 4. СИСТЕМА НЕПРЕРЫВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В радиотехнических приложениях не всегда удобна полупараметрическая оценка (8) распределения длительности выброса в виде *континуальной смеси*. Иногда исследователю желательно располагать достаточно простой системой непрерывных распределений, аппроксимирующих плотность вероятности длительности выброса  $\theta(t_0, \tau)$ . Такая система может быть получена исходя из хорошо известного факта, состоящего в том, что выбросы достаточно большой длительности имеют одностороннее экспоненциальное распределение [6]. Таким образом, идея формирования указанной системы состоит в *нелинейном безынерционном преобразовании*, подобранный соответствующим образом, монотонно возрастающей дифференцируемой формирующей функции  $\Psi(t_0, \tau)$  с односторонним экспоненциальным распределением. В этом случае оценка плотности вероятности длительности выброса приобретает вид  $\hat{\theta}(t_0, \tau) = \exp\{-\Psi(t_0, \tau)\} d\Psi(t_0, \tau)/d\tau$ . Решение этого дифференциального уравнения относительно формирующей функции с краевыми условиями  $\Psi(t_0, 0) = 0$  и  $\Psi(t_0, \infty) = \infty$  суть  $\Psi(t_0, \tau) = -\ln\{1 - T(t_0, \tau)\}$ , где  $T(t_0, \tau)$  – интегральная функция распределения длительности выброса. Полученное решение позволяет с помощью ядерной оценки (8) полу-

чить интерполяционное приближение формирующей функции

$$\hat{\Psi}(t_0, \tau) = -\ln \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t_0) T_n(t_0, \tau) \right\};$$

$$T_n(t_0, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{для } \tau < t_{n-1} - t_0, \\ \int_{-1}^{\Delta(\tau)} \text{Ker}(t) dt & \text{для } t_{n-1} - t_0 \leq \tau \leq t_n - t_{n-1}, \\ 1 & \text{для } \tau > t_n - t_{n-1} \end{cases}$$

и в дальнейшем выбрать ее конкретный функциональный тип. Здесь  $\Delta(\tau) + 1 = 2(\tau - t_{n-1} + t_0)/(t_n - t_{n-1} + t_0 - t_{n-1})$ . Ясно, что такой выбор должен учитывать наличие у формирующей функции наклонной асимптоты  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \psi(t_0, \tau) = \mu^2(t_0)\tau$ .

Хорошее описание дает модель в виде смеси  $K$  монотонно возрастающих дифференцируемых функций

$$\psi(t_0, \tau) = \mu^2(t_0)\tau \left\{ 1 - \sum_{k=1}^K p_k(t_0) \exp[-\rho_k^2(t_0)\tau] \right\};$$

$$\sum_{k=1}^K p_k(t_0) = 1.$$

В результате система непрерывных распределений, аппроксимирующих плотность вероятности длительности выброса  $\theta(\tau, t_0)$ , также представляется собой *конечную смесь*

$$\hat{\theta}(t_0, \tau) = \sum_{k=1}^K p_k(t_0) \phi_k(t_0, \tau) \quad (9)$$

парциальных распределений

$$\phi_k(t_0, \tau) = q_k(t_0, \tau) \mu^2(t_0) \times$$

$$\times \exp \left[ -\mu^2(t_0)\tau \left\{ 1 - \sum_{k=1}^K p_k(t_0) \exp[-\rho_k^2(t_0)\tau] \right\} \right];$$

$$q_k(t_0, \tau) = 1 - [1 - \rho_k^2(t_0)\tau] \exp[-\rho_k^2(t_0)\tau].$$

Параметры  $\mu(t_0), p_k(t_0), \rho_k(t_0)$  ( $k = 1, \dots, K$ ) конечной смеси (9) целесообразно оптимизировать по критерию минимума абсолютной ошибки аппроксимации полупараметрической оценки (8).

## 5. ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ НОРМАЛЬНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Ковариационное приближение многомерной ПВ (4) и многомерного интеграла вероятностей

(7) позволяют получить эффективные в вычислительном отношении оценки распределения длительности выбросов нормального нестационарного случайного процесса  $\xi(t)$ . Приближение (4) многомерной ПВ процесса в этом случае приобретает вид разложения в ряд по *тетрахорическим функциям*, впервые полученном в работе [17]

$$\Phi_{m+1}(x_n, \dots, x_{n+m}) =$$

$$= \sum_{k_{0,1}} \dots \sum_{k_{(m-1),m}} \frac{r_{0,1}^{k_{0,1}} \dots r_{(m-1),m}^{k_{(m-1),m}}}{k_{0,1}! \dots k_{(m-1),m}!} \times$$

$$\times \prod_{v=0}^m \left\{ \frac{\phi(\tilde{x}_v)}{\sigma_v} H_{k_v}(\tilde{x}_v) \right\}. \quad (10)$$

Здесь  $v_v = \langle \xi(t_{n+v}) \rangle$  и  $\sigma_v^2 = \langle \xi^2(t_{n+v}) \rangle - \langle \xi(t_{n+v}) \rangle^2$  – математическое ожидание и дисперсия отсчета процесса в дискретный момент времени  $t_{n+v}$ ;  $\mathbf{R} = \{r_{i,j}\}_{i=0,m}^{j=0,m}$  – симметричная матрица *коэффициентов корреляции* отсчетов процесса в дискретные моменты времени  $t_{n+i}$  и  $t_{n+j}$ ;  $\tilde{x}_v = (x_{n+v} - v_v)/\sigma_v$  – стандартизованный аргумент;  $\phi(x)$  – стандартизованная нормальная одномерная ПВ;  $H_k(x)$  – полином Чебышева–Эрмита степени  $k$  с весовой функцией  $\phi(x)$ .

Соответственно для оценки вероятности попадания дискретных отсчетов нормального процесса в гиперквадрант  $(m+1)$ -мерного евклидова пространства, с вершиной в точке с координатами  $(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$  получим ряд по степеням коэффициентов корреляции:

$$P\{E_{n,m}\} = P_{m+1}(x_n, \dots, x_{n+m}) =$$

$$= \sum_{k_{0,1}} \dots \sum_{k_{(m-1),m}} \frac{r_{0,1}^{k_{0,1}} \dots r_{(m-1),m}^{k_{(m-1),m}}}{k_{0,1}! \dots k_{(m-1),m}!} \prod_{v=0}^m G_{k_v}(\tilde{x}_v), \quad (11)$$

где

$$G_k(x) = \begin{cases} 1 - \Phi(x) & \text{при } k = 0, \\ H_{k-1}(x)\phi(x) & \text{при } k > 0, \end{cases}$$

а  $\Phi(x)$  – интеграл вероятностей [10]. В итоге расчетные формулы для интерполяционного приближения распределения длительности выброса нормального нестационарного случайного процесса – суть (3), (5), (8) и (11).

## 6. КОВАРИАЦИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЯДА РАЙСА

Пусть дополнительно  $\xi(t)$  дифференцируемый в среднем квадратичном случайный процесс. Тогда интегральная функция распределения длительности выбросов процесса над детерминированной также дифференцируемой кривой  $x(t)$  может

быть представлена знакочередующимся рядом Райса [6, 8]

$$T(t_0, \tau) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt_m \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt_{m-1} \dots \\ \dots \int_{t_0}^{t_0+\tau} \phi_m(t_1, \dots, t_m | t_0) dt_1. \quad (12)$$

Здесь условная ПВ  $\phi_m(t_1, \dots, t_m | t_0)$ , симметричная относительно аргументов  $t_1, \dots, t_m$ , определяет вероятность  $\phi_m(t_1, \dots, t_m | t_0) dt_1 \cdot \dots \cdot dt_m$  одновременно наблюдать хотя бы по одному пересечению пороговой функции  $x(t)$  сверху вниз на временных интервалах  $(t_1, t_1 + dt_1), \dots, (t_m, t_m + dt_m)$  при условии, что было зафиксировано пересечение кривой снизу вверх на временном интервале  $(t_0, t_0 + dt_0)$ . Ее общее выражение, приведенное в монографии [6], целесообразно модифицировать и представить в виде

$$\phi_m(t_1, \dots, t_m | t_0) = \frac{I_m^-(t_0, \dots, t_m)}{I_0^+(t_0)} f_m(t_0, \dots, t_m); \\ I_0^+(t_0) = \int_{y_0}^{+\infty} (z_0 - y_0) \vartheta_1^{\xi_0^{(1)}}(z_0 | x_0) dz_0; \\ I_m^-(t_0, \dots, t_m) = \int_{y_0}^{+\infty} (z_0 - y_0) dz_0 \int_{-\infty}^{y_1} (y_1 - z_1) dz_1 \dots \\ \dots \int_{-\infty}^{y_m} (y_m - z_m) \vartheta_{m+1}(z_0, \dots, z_m | x_0, \dots, x_m) dz_m, \quad (13)$$

где  $f_m(t_0, \dots, t_m) = \Phi_m(x_1, \dots, x_m | x_0)$  – значение условной плотности вероятности отсчетов процесса  $\xi_1, \dots, \xi_m$  в точке  $\xi_1 = x_1 = x(t_1), \dots, \xi_m = x_m = x(t_m)$  при условии, что  $\xi_0 = x_0 = x(t_0)$ ;  $\vartheta_{m+1}(z_0, \dots, z_m | x_0, \dots, x_m)$  – условная плотность вероятности первых производных отсчетов процесса  $d\xi(t_0)/dt, \dots, d\xi(t_m)/dt$  при условии, что  $\xi_0 = x_0, \dots, \xi_m = x_m$ ;  $y(t) = dx(t)/dt$  и  $y_m = y(t_m)$  – первая производная пороговой функции и ее отсчет в дискретный момент времени  $t_m$ . Такая форма удобна для получения ковариационного приближения ряда Райса гауссовского процесса.

Пусть  $S(\tau_1, \tau_2)$  – ковариационная функция процесса, а  $\Sigma_{m+1} = \{\sigma_{i,j}\}_{i=0, m}^{j=0, m}$  – ковариационная матрица его отсчетов  $\xi_0, \dots, \xi_m$  в дискретные моменты времени  $t_0, \dots, t_m$ . Очевидно, что

$$\sigma_{i,j} = S(t_i, t_j) = \langle \xi(t_i) \xi(t_j) \rangle - v_i v_j; \\ \sigma_i^2 = \sigma^2(t_i) = \sigma_{i,i}; \quad v_i = v(t_i) = \langle \xi(t_i) \rangle.$$

Матрицу  $\Sigma_{m+1}$  представим в блочной форме

$$\Sigma_{m+1} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \vec{\sigma}_{1,0}^T \\ \vec{\sigma}_{1,0} & \Sigma_m \end{bmatrix}, \text{ где } \vec{\sigma}_{1,0}^T = (\sigma_{1,0}, \dots, \sigma_{m,0}), \text{ а } \Sigma_m =$$

ковариационная матрица отсчетов процесса  $\xi_1, \dots, \xi_m$ . Тогда для нормального процесса условное распределение  $\Phi_m(x_1, \dots, x_m | x_0)$  будет также нормальным с вектором средних  $\vec{N}(t_0, \dots, t_m) = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m)^T = (v_1, \dots, v_m)^T + \vec{\sigma}_{1,0} (x_0 - v_0) / \sigma_0^2$  и ковариационной матрицей  $\widehat{\Sigma}_m(t_0, \dots, t_m) = \Sigma_m - \vec{\sigma}_{1,0} \vec{\sigma}_{1,0}^T / \sigma_0^2$  [18]. Далее

$$f_m(t_0, \dots, t_m) = (2\pi)^{-m/2} |\det\{\widehat{\Sigma}_m(t_0, \dots, t_m)\}|^{-1/2} \times \\ \times \exp\{-D_m^2(t_0, \dots, t_m)/2\}. \quad (14)$$

Здесь расстояние Махalanобиса для вектора отсчетов пороговой кривой,  $\vec{X}(t_1, \dots, t_m) = (x_1, \dots, x_m)^T$ , в дискретные моменты времени  $t_1, \dots, t_m$  вычисляется по формуле

$$D_m^2(t_0, \dots, t_m) = \{\vec{X}(t_1, \dots, t_m) - \vec{N}(t_0, \dots, t_m)\}^T \times \\ \times \widehat{\Sigma}_m^{-1}(t_0, \dots, t_m) \{\vec{X}(t_1, \dots, t_m) - \vec{N}(t_0, \dots, t_m)\}.$$

Известно, что кумулянтные функции производной процесса представляют собой результат дифференцирования соответствующих кумулянтных функций самого процесса [19]. Поэтому для нормального процесса условное распределение  $\vartheta_{m+1}(z_0, \dots, z_m | x_0, \dots, x_m)$  будет также нормальным с вектором средних  $(\hat{\mu}_0, \dots, \hat{\mu}_m)^T = (\mu_0, \dots, \mu_m)^T + \Sigma_{01} \Sigma_{m+1}^{-1} (x_0 - v_0, \dots, x_m - v_m)^T$  и ковариационной матрицей  $\widehat{\Sigma} = \{\widehat{\sigma}_{i,j}\}_{i=0, m}^{j=0, m} = \Sigma_{11} - \Sigma_{01} \Sigma_{m+1}^{-1} \Sigma_{01}^T$  [15]. Здесь  $\mu_v = \mu(t_v) = dv(t_v)/dt$  – отсчет производной математического ожидания процесса в дискретный момент времени  $t_v$ ;  $\Sigma_{01} = \{\epsilon_{i,j} = \langle \xi^{(1)}(t_i) \xi(t_j) \rangle - \mu(t_i) v(t_j) \}_{i=0, m}^{j=0, m}$  – матрица взаимных ковариаций процесса и его производной;  $\Sigma_{11} = \{\zeta_{i,j} = \langle \xi^{(1)}(t_i) \xi^{(1)}(t_j) \rangle - \mu(t_i) \mu(t_j) \}_{i=0, m}^{j=0, m}$  – ковариационная матрица производной процесса

$$\epsilon_{i,j} = \epsilon(t_i, t_j) = \partial S(\tau_1, \tau_2) / \partial \tau_1 \Big|_{\tau_1=t_i; \tau_2=t_j};$$

$$\zeta_{i,j} = \zeta(t_i, t_j) = \partial^2 S(\tau_1, \tau_2) / \partial \tau_1 \partial \tau_2 \Big|_{\tau_1=t_i; \tau_2=t_j}.$$

Разложение распределения  $\vartheta_{m+1}(z_0, \dots, z_m | x_0, \dots, x_m)$  в ряд по тетрахорическим функциям имеет вид

$$\vartheta_{m+1}(z_0, \dots, z_m | x_0, \dots, x_m) = \\ = \sum_{k_{0,1}} \dots \sum_{k_{(m-1),m}} \frac{\rho_{0,1}^{k_{0,1}} \cdot \dots \cdot \rho_{(m-1),m}^{k_{(m-1),m}}}{k_{0,1}! \cdot \dots \cdot k_{(m-1),m}!} \prod_{v=0}^m \left\{ \frac{\phi(\hat{\bar{z}}_v)}{\hat{\sigma}_v} H_{k_v}(\hat{\bar{z}}_v) \right\}.$$

Здесь  $\hat{\bar{\sigma}}_v^2 = \hat{\sigma}_{v,v}$  и  $\rho_{i,j} = \hat{\sigma}_{i,j}/(\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j)$  – условные дисперсия отсчета производной процесса  $\xi^{(1)}(t_v)$  и коэффициент корреляции отсчетов производной процесса  $\xi^{(1)}(t_i)$  и  $\xi^{(1)}(t_j)$  при условии, что  $\xi_0 = x_0, \dots, \xi_m = x_m$ ;  $\hat{\bar{z}}_v = (\hat{z}_v - \hat{\mu}_v)/\hat{\sigma}_v$  – стандартизованный аргумент. Интегрирование полученного ряда по формуле (13) дает разложение в ряд функции

$$I_m^-(t_0, \dots, t_m) = \sum_{k_{0,1}} \dots \sum_{k_{(m-1),m}} \frac{\rho_{0,1}^{k_{0,1}}(t_0, \dots, t_m) \cdot \dots \cdot \rho_{(m-1),m}^{k_{(m-1),m}}(t_0, \dots, t_m)}{k_{0,1}! \cdot \dots \cdot k_{(m-1),m}!} \times \\ \times \hat{\sigma}_0(t_0, \dots, t_m) V_{k_0}(t_0, \dots, t_m) \times \\ \times \prod_{v=1}^m \hat{\sigma}_v(t_0, \dots, t_m) W_{k_v}(t_0, \dots, t_m), \quad (15)$$

где

$$V_{k_0}(t_0, \dots, t_m) = \begin{cases} \phi(\hat{y}_0) - \hat{y}_0[1 - \Phi(\hat{y}_0)] & \text{при } k_0 = 0, \\ 1 - \Phi(\hat{y}_0) & \text{при } k_0 = 1, \\ H_{k_0-2}(\hat{y}_0)\phi(\hat{y}_0) & \text{при } k_0 \geq 2; \end{cases}$$

$$W_{k_v}(t_0, \dots, t_m) = \begin{cases} \phi(\hat{y}_v) + \hat{y}_v\Phi(\hat{y}_v) & \text{при } k_v = 0, \\ -\Phi(\hat{y}_v) & \text{при } k_v = 1, \\ H_{k_v-2}(\hat{y}_v)\phi(\hat{y}_v) & \text{при } k_v \geq 2; \end{cases}$$

$\hat{y}_v = (y_v - \hat{\mu}_v)/\hat{\sigma}_v$  – стандартизованный аргумент.

Выражения (14) и (15) показывают, что условные распределения  $\vartheta_m(t_1, \dots, t_m | t_0)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) сложным образом зависят от временных отсчетов процесса. Интегрирование этих распределений в соответствии с формулой (12) возможно лишь численными методами для ограниченного числа членов ряда Райса. Поэтому практический интерес представляет анализ поведения ряда для малых и больших длительностей выбросов. Рациональным в этом смысле является приближенный метод аппроксимации распределения длительности выбросов по участкам [10].

## 7. АППРОКСИМАЦИЯ ПО УЧАСТКАМ

Проанализируем поведение ряда Райса для гауссовского процесса, прежде всего при больших длительностях выбросов. При  $\tau \rightarrow \infty$  ковариационные матрицы  $\Sigma_{m+1}^{-1}; \Sigma_{01}; \Sigma_{11}$  принимают диагональный вид. Из выражений (14) и (15) в этом случае нетрудно получить предельные равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f_m(t_0, \dots, t_m) = \prod_{v=1}^m \varphi_1^{\xi_v}(x_v) = \\ = \prod_{v=1}^m \varphi\{\tilde{x}(t_v)\}/\sigma(t_v); \\ \tilde{x}(t_v) = \{x(t_v) - v(t_v)\}/\sigma(t_v); \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} I_m^-(t_0, \dots, t_m) = I_0^+(t_0) \prod_{v=1}^m I_v^-(t_v); \quad (16)$$

$$I_v^-(t_v) = \int_{-\infty}^{y_v} (y_v - z_v) \vartheta_1^{\xi_v^{(1)}}(z_v | x_v) dz_v,$$

$I_0^+(t_0) = \hat{\sigma}_\infty(t_0)(\varphi\{\hat{y}_\infty(t_0)\} - \hat{y}_\infty(t_0)[1 - \Phi\{\hat{y}_\infty(t_0)\}]),$   
 $I_v^-(t_v) = \hat{\sigma}_\infty(t_v)(\varphi\{\hat{y}_\infty(t_v)\} + \hat{y}_\infty(t_v)\Phi\{\hat{y}_\infty(t_v)\}),$   
где  $\hat{y}_\infty(t_v) = \{y(t_v) - \hat{\mu}_\infty(t_v)\}/\hat{\sigma}_\infty(t_v)$  – стандартизованный аргумент, а  $\hat{\mu}_\infty(t_v) = \mu(t_v) + \varepsilon(t_v, t_v)\{x(t_v) - v(t_v)\}/\sigma^2(t_v)$  и  $\hat{\sigma}_\infty^2(t_v) = \zeta(t_v, t_v) - \varepsilon(t_v, t_v)/\sigma^2(t_v)$  – условные математическое ожидание и дисперсия производной процесса  $\xi^{(1)}(t_v)$  в дискретный момент времени  $t_v$  при условии, что  $\xi(t_v) = x(t_v)$ . Подстановка полученных равенств в формулу (13) и интегрирование в соответствии с выражением (12) дает оценку интегральной функции распределения длительности выбросов гауссовского процесса в области значений  $\tau \geq \tau^*$

$$T_\infty(t_0, \tau) = 1 - \exp\{-\psi_\infty(t_0, \tau)\};$$

$$\psi_\infty(t_0, \tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \omega(t) dt. \quad (17)$$

Здесь функция времени  $\omega(t) = \sigma_\infty(t)\varphi\{\tilde{x}(t)\}[\varphi\{\hat{y}_\infty(t)\} + \hat{y}_\infty(t)\Phi\{\hat{y}_\infty(t)\}]/\sigma(t)$  характеризует скорость экспоненциального затухания распределения по мере увеличения длительности выбросов. Дифференцирование функции (17) по  $\tau$  дает оценку плотности вероятности длительности выбросов гауссовского процесса в области значений  $\tau \geq \tau^*$

$$\theta_\infty(t_0, \tau) = \omega(t_0 + \tau) \exp\{-\psi_\infty(t_0, \tau)\}. \quad (18)$$

В области значений  $\tau \rightarrow 0$  поведение плотности распределения длительности выбросов определяется в основном несколькими первыми членами ряда Райса [6]. В частности, для малых длительностей  $\tau < \tau^*$  достаточно точной аппроксимацией будет сумма первых трех членов ряда

$$\begin{aligned} \theta_0(t_0, \tau) = & \phi_1(t_0 + \tau | t_0) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \phi_2(t_1, t_0 + \tau | t_0) dt_1 + \\ & + \frac{1}{6} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} dt_2 \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \phi_3(t_1, t_2, t_0 + \tau | t_0) dt_1. \end{aligned} \quad (19)$$

В этом случае вычислительные затраты, связанные с численным интегрированием условных распределений  $\phi_m(t_1, \dots, t_{m-1}, t_0 + \tau | t_0)$  ( $m = 2, 3$ ), например, с помощью аддитивных кубатурных алгоритмов [20] будут вполне приемлемыми. Очевидно, что в качестве значения параметра  $\tau^*$  необходимо выбирать абсциссу точки пересечения двух приближений, т.е. величину, удовлетворяющую трансцендентному уравнению  $\theta_0(t_0, \tau^*) = \theta_\infty(t_0, \tau^*)$ . В итоге аппроксимация по участкам плотности распределения длительности выбросов гауссовского нестационарного случайного процесса имеет вид

$$\hat{\theta}(t_0, \tau) = \begin{cases} \theta_0(t_0, \tau) & \text{при } \tau \leq \tau^*, \\ \theta_\infty(t_0, \tau) & \text{при } \tau \geq \tau^*, \end{cases}$$

а расчетные формулы для ее реализации – суть (13)–(16) и (18), (19).

---


$$\varphi_{m+1}(\vec{X}_{n,m}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m+1}{2}}} \sum_{h=1}^H \frac{p(h) \exp\{-[\vec{X}_{n,m} - \vec{N}_{n,m}(h)]^T \mathbf{B}^{-1}(h) [\vec{X}_{n,m} - \vec{N}_{n,m}(h)]/2\}}{|\det\{\mathbf{B}(h)\}|^{\frac{1}{2}}},$$


---

то есть оценить их парциальные веса  $p(h)$  ( $h = 1, \dots, H$ ), а также характеристики положения  $\vec{N}_{n,m}(h) = \{v_0(h), \dots, v_m(h)\}^T$  и масштаба  $\mathbf{B}(h) = \{b_{i,j}(h)\}_{i=0, m}^{j=0, m}$ . В этом случае соответствующая оценка многомерного интеграла вероятностей представляет собой сумму парциальных вероятностей

$$\begin{aligned} P\{E_{n,m}\} = & \sum_{h=1}^H p(h) P_{m+1}(x_n, \dots, x_{n+m} | h); \\ \sum_{h=1}^H p(h) = & 1 \end{aligned} \quad (20)$$

попадания дискретных отсчетов полигауссовой модели процесса в гиперквадранты ( $m+1$ )-мерного евклидова пространства, с вершинами, смешен-

## 8. ПОЛИГАУССОВСКАЯ МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В реальных системах условия возникновения и передачи сигналов, равно как и условия их воздействия на устройства обработки информации, недетерминированы и бесконечно разнообразны. По этой причине адекватное статистическое описание сигналов обеспечивают так называемые *рандомизированные модели* в виде смесей стандартных распределений. Благодаря известным достоинствам нормальных распределений в статистической радиотехнике и радиофизике широкое распространение получили *полигауссовые модели* случайных процессов. Представляя собой смеси нормальных распределений, такого рода аппроксимации достаточно точно описывают статистические свойства реальных воздействий для широкого класса информационных систем [21].

Вместе с тем совершенно очевидно, что представленная в разд. 5 кусочно-линейная интерполяционная оценка распределения длительности выбросов гауссовского случайного процесса допускает естественное обобщение на случай полигауссовой модели. Другими словами, пусть с помощью соответствующего алгоритма обучения без поощрения типа EM, SEM или SWM удается аппроксимировать многомерную плотность вероятности процесса  $\varphi_{m+1}(x_n, \dots, x_{n+m})$  конечной смесью нормальных распределений

ными в точки, радиусы-векторы которых – суть  $\vec{X}_{n,m} = \{x_n, \dots, x_{n+m}\}^T$ . Аналогично выражению (11) оценку парциальной вероятности получим в виде ряда по степеням парциальных коэффициентов корреляции  $R(h) = \{r_{i,j}(h)\}_{i=0, m}^{j=0, m}$  полигауссовой модели процесса

$$\begin{aligned} P_{m+1}(x_n, \dots, x_{n+m} | h) = & \sum_{k_{0,1}} \dots \\ & \dots \sum_{k_{(m-1),m}} \frac{r_{0,1}^{k_{0,1}}(h) \cdot \dots \cdot r_{(m-1),m}^{k_{(m-1),m}}(h)}{k_{0,1}! \cdot \dots \cdot k_{(m-1),m}!} \prod_{v=0}^m G_{k_v}\{\tilde{x}_v(h)\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь, как и прежде,  $\tilde{x}_v(h) = \{x_{n+v} - v_v(h)\} / \sqrt{b_{v,v}(h)}$  – стандартизованный аргумент;  $x_{n+v} = x(t_{n+v})$  – отсчет пороговой функции  $x(t)$  в дискретный мо-

мент времени  $t_{n+v}$ ;  $v_v(h)$  и  $b_{v,v}(h)$  – парциальные математическое ожидание и дисперсия отсчета процесса в дискретный момент времени  $t_{n+v}$  такие, что

$$\sum_{h=1}^H p(h)v_v(h) = v_v = \langle \xi(t_{n+v}) \rangle;$$

$$\sum_{h=1}^H p(h)b_{v,v}(h) = \langle \xi^2(t_{n+v}) \rangle - \langle \xi(t_{n+v}) \rangle^2;$$

$r_{i,j}(h) = b_{i,i}(h)/\sqrt{b_{i,i}(h)b_{j,j}(h)}$  – парциальный коэффициент корреляции отсчетов процесса в дискретные моменты времени  $t_{n+i}$  и  $t_{n+j}$  такой, что  $\sum_{h=1}^H p(h)b_{i,j}(h) = \langle \xi(t_{n+1})\xi(t_{n+j}) \rangle - \langle \xi(t_{n+1}) \rangle \langle \xi(t_{n+j}) \rangle$ . В итоге расчетные формулы для интерполяционного приближения распределения длительности выброса негауссовского нестационарного случайного процесса – суть (3), (5), (8) и (20), (21).

### 9. СОПОСТАВЛЕНИЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ И ПОЛУПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОЦЕНОК

Свойства полупараметрической интерполяционной оценки распределения длительности выбросов (8) исследовались для экспериментальных данных в виде реализаций стационарного в широком смысле случайного процесса. Выборочные оценки математического ожидания (МО) –  $v$ , среднего квадратичного отклонения (СКО) –  $\sigma$ , асимметрии и эксцесса одномерного распределения  $\phi_1^\xi(x)$  процесса, а также его наименьшее и наибольшее значения представлены в табл. 2. Объем выборки составлял 42502 дискрета. Непараметрическая оценка ПВ  $\phi_1^\xi(x)$  в виде одномерной гистограммы, сглаженной сдвигом (Averaged Shifted Histogram – ASH) [13] практически совпадала с нормальным распределением, характерис-

Таблица 2. Статистики процесса и его выбросов

Момент	Процесс	Выброс	
		$\tilde{x} = 0$	$\tilde{x} = 1$
Математическое ожидание	0.3569	36.377	2.1421
Среднее квадратичное отклонение	0.2352	37.024	2.3205
Асимметрии	-0.1396	1.8146	2.1219
Эксцесса	3.7554	3.1756	4.6921
наименьшее значение	-1.6375	0.4336	0.4981
наибольшее значение	0.9050	20.213	13.577

тиki положения и масштаба которого – суть выборочные значения из табл. 2. Иными словами, при построении оценки (8) принималась гипотеза о нормальности случайного процесса. Смешенная выборочная оценка коэффициента корреляции  $R$  процесса представлена на рис. 1. Корреляционный лаг измерялся в количестве интервалов дискретизации  $N$  временного ряда. Интервал корреляции процесса составил порядка 250 дискрет. Непараметрические ASH-оценки распределения длительности выбросов анализируемого процесса над нулевым и единичным стандартизованными порогами  $\tilde{x} = (x - v)/\sigma$  представлены на рис. 2 и 5 соответственно. Количество суженных разрядных интервалов для этих гистограмм выбиралось равным 100 и 80. При построении полупараметрической оценки (SemiParametrical Estimation – SPE) распределения длительности выбросов связность  $M$  приближения вероятностей гипотез (3) и (5), а также шаг интерполяции временного ряда  $S$ , выраженный в количестве интервалов дискретизации процесса, интерпретировались как параметры сглаживания оценки (8). На рис. 3 и 4 представлены зависимости суммарной абсолютной невязки  $E$  между ASH- и SPE-оценками распределения длительности выбросов процесса над нуле-

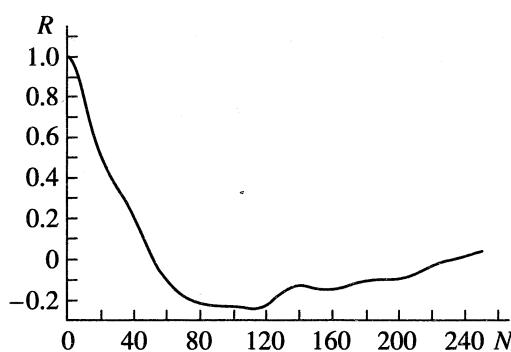


Рис. 1. Зависимость коэффициента корреляции  $R$  от лага  $N$  стационарного случайного процесса.

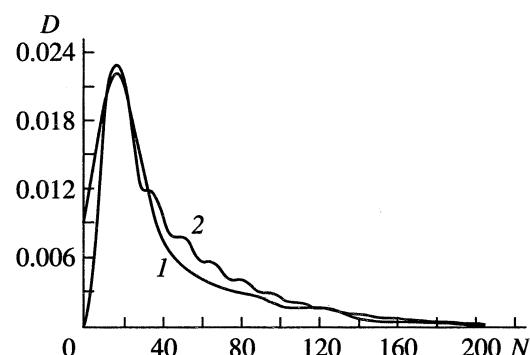


Рис. 2. Оценки распределения длительности выбросов над нулевым порогом: 1 – ASH, 2 – SPE.

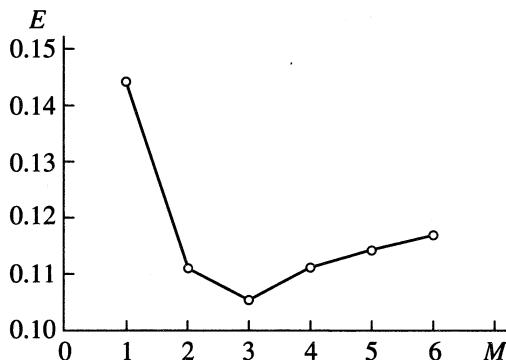


Рис. 3. Зависимость суммарной абсолютной невязки  $E$  от связности оценки  $M$ .

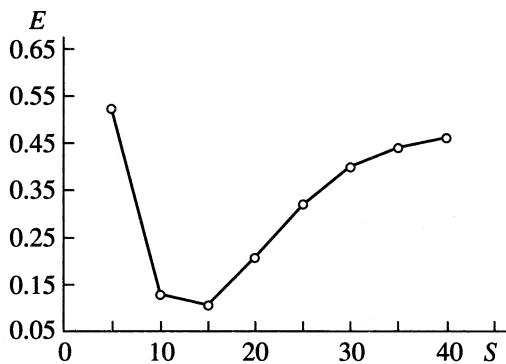


Рис. 4. Зависимость суммарной абсолютной невязки  $E$  от шага интерполяции  $S$  случайного процесса.

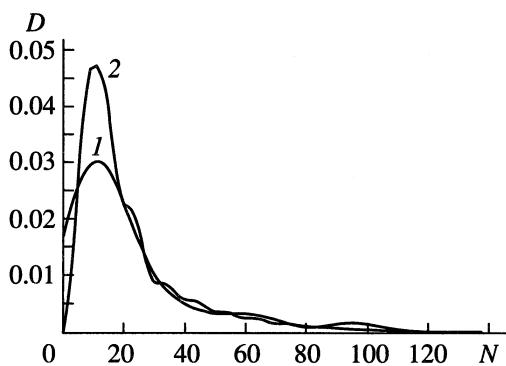


Рис. 5. Оценки распределения длительности выбросов над единичным стандартизованным порогом: 1 – ASH; 2 – SPE.

вым порогом от указанных параметров. Наименьшее значение невязки отвечает случаю  $M = 3$ ,  $S = 15$ , дважды взвешенному ( $k = 2$ ) ядру (9) и квадратичной ( $K = 2$ ) аппроксимации многомерного интеграла вероятностей (11). Значение суммарной абсолютной невязки в этом случае составляет 0.1054. К сожалению, как отмечалось в работе [11], ряд (11) ведет себя нерегулярно в том смысле

ле, что большее число членов разложения не обеспечивают меньшую погрешность оценки вероятности события (6). На рис. 5 представлены ASH- и SPE-оценки распределения длительности выбросов процесса над единичным стандартизованным порогом. Их суммарная абсолютная невязка составила 0.1608 для значений параметров  $M = 3$ ,  $S = 10$ ,  $K = 3$  и дважды взвешенного ядра.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен интерполяционный метод оценивания распределения длительности выбросов нестационарного негауссовского случайного процесса. В классе полигауссовых моделей конечномерной плотности вероятности процесса реализовано полупараметрическое представление распределения длительности выбросов. В качестве параметров сглаживания оценки выступают размеры интервалов интерполяции и связность дискретных отсчетов временного ряда по критерию ковариации. Представленные модели обеспечивают приемлемые вычислительные затраты для достижения заданной точности оценки распределения длительности выбросов широкого класса случайных процессов.

Автор выражает благодарность В.И. Тихонову за внимание к данной работе и ценные советы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rice S.O. // Bell System Technical J. 1944. V. 23. P. 282; 1945. V. 24. P. 46.
2. Longuet-Higgins M.S. // Philadelphia Trans. Soc. 1962. V. A254. Ser. A. № 1047. P. 557.
3. Беляев Ю.К. // Теория вероятностей и ее применение. 1966. Т. 11. № 1. С. 120; 1967. Т. 12. № 3. С. 444.
4. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969.
5. Кузнецов П.И., Стратонович Р.Л., Тихонов В.И. // Журн. теорет. физики. 1954. Т. 24. № 1. С. 103.
6. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970.
7. Питербарг В.И. // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182. № 1. С. 46.
8. Мирошин Р.Н. Пересечения кривых гауссовскими процессами. Л.: ЛГУ, 1981.
9. Longuet-Higgins M.S. // Proc. Royal Soc. London, 1958. V. 246. Ser. A. № 1244.
10. Фомин Я.А. Теория выбросов случайных процессов. М.: Связь, 1980.
11. Лабунец Л.В. // Труды МВТУ: Вопросы проектирования кибернетических устройств. М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1987. Вып. 493. С. 3.
12. Cramer H. Mathematical methods of statistics. Princeton: Univ. Press, 1946.

13. *Scott D.W.* Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization. N. Y.: J. Wiley and Sons, 1992.
14. *Лабунец Л.В.* // Радиотехника. 1985. № 11. С. 47.
15. *Лабунец Л.В.* // Радиотехника. 1986. № 9. С. 64.
16. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1982.
17. *Dutt J.E.* // Biometrika. 1973. V. 60. № 3. P. 637.
18. *DeGroot M.H.* Optimal Statistical Decisions. N.Y.: McGraw-Hill Company, 1970.
19. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных не-гауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.
20. *Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B.* Computer Methods for Mathematical Computations. N.Y.: Prentice Hall, 1977.
21. *Акимов П.С., Евстратов Ф.Ф. и др.* Обнаружение радиосигналов / Под ред. Колосова А.А. М.: Радио и связь, 1989.