3.4. ЭКСПЕРТНАЯ МОДЕЛЬ СКОРИНГА РОССИЙСКИХ АКЦИЙ

Лабунец Л.В., д.т.н., с.н.с., проф. кафедры «Системы обработки информации и управления» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, зав. кафедрой «Информационные системы в экономике и управлении» НОУ ВПО «Российский новый университет»;
Лабунец Е.Л., специалист отдела технического обеспечения Управления банковских информационных технологий ОАО «Национальный корпоративный банк»;
Лебедева Н.Л., главный специалист департамента информационных технологий ОАО «Банк ВТБ»

В статье представлена экспертная модель скоринга ценных бумаг на примере российских акций в виде системы фундаментальных показателей деятельности компаний. Рассмотрены процедуры формирования цепочки предпочтений финансовых мультипликаторов и оценки весов их важности на основе метода парных сравнений Саати. Для случая трех классов значимости факторов предложен новый, геометрически интерпретируемый показатель согласованности элементов матрицы парных сравнений. Мнения экспертов предложено согласовывать с помощью релаксационных алгоритмов решения системы линейных неравенств.

ВВЕДЕНИЕ

Важным этапом инвестиционного процесса на финансовых рынках является анализ потенциала ценных бумаг (ЦБ) по критерию доходность – риск. Среди различных подходов к анализу ЦБ наибольшее распространение на практике получили методы, основанные на рациональном сочетании фундаментального и технического анализа биржевых активов. Аналитик-«фундаменталист» рассчитывает справедливую цену актива и сравнивает ее с текущим рыночным курсом, классифицируя ЦБ как недооцененную или переоцененную. Трейдер-практик оперируя, как правило, инструментами технического анализа, пытается формировать краткосрочный прогноз ценовой динамики актива. Агрегирование результатов обоих подходов позволяет конкретизировать торговые рекомендации относительно покупки, продажи или сохранения позиции на фондовом рынке.

Существенной проблемой является значительная доля неопределенности результатов анализа ЦБ, обусловленная необходимостью учета большого количества факторов и выбора параметров в рамках указанных выше методов. Один из вариантов решения этой проблемы основан, на наш взгляд, на применении фундаментальных методов теории принятия решений [8] и методов теории нечетких множеств [6]. Рациональное инвестирование – это, в конечном итоге, разумный компромисс между доходностью и риском вложений в биржевые активы. Надежной методической основой такого рода компромисса является цепочка предпочтений инвестора, полученная на основе базы знаний экспертов – аналитиков. Обоснованный выбор приоритетов позволяет, в свою очередь, сформировать иерархическую структуру факторов доходности и рисков инвестирования в рамках фундаментального и / или технического анализа ЦБ. Экспертное оценивание весов значимости подобных мультипликаторов и их последующее агрегирование в комплексный показатель с помощью алгоритмов нечеткого логического вывода позволяет, в итоге, ранжировать активы по их инвестиционной привлекательности с учетом неопределенности исходной информации.

Одна из проблем экспертного оценивания в теории принятия решений состоит в противоречивости мнений экспертов, выраженная в несогласованности элементов матрицы парных сравнений, применяемой в методе анализа иерархий Томаса Саати [7]. Целью данной работы является разработка методики оптимального выбора весов значимости факторов, входящих в состав экспертной модели инвестиционного качества ЦБ. Для конкретизации дальнейшего анализа, не ограничивающего общности предлагаемой методики, рассмотрим цепочку предпочтений инвестора, основанную на фундаментальном анализе актива, в частности, мультипликативным методом расчета справедливой цены ЦБ.

1. МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СПРАВЕДЛИВОЙ ЦЕНЫ ЦЕННОЙ БУМАГИ

Долгие годы предпринимались попытки найти, так называемые, опережающие индикаторы фондового рынка. Крупные экономические институты по всему миру обработали массу статистической информации в поисках показателей, с помощью которых возможно было бы в той или иной мере прогнозировать поведение фондового рынка. Исследованию подвергли все, от валового внутреннего продукта и уровня безработицы, до лунных затмений. Вывод всегда был один и тот же и это, пожалуй, самый важный результат фундаментального анализа: фондовый рынок не имеет опережающих индикаторов. Более того, с большой долей уверенности можно утверждать, что сам фондовый рынок является опережающим индикатором, по отношению к основным экономическим показателям.

Иными словами, не существует экономических показателей, определив которые мы могли бы сделать достаточно точный прогноз поведения тех или иных биржевых инструментов на рынке. Тем не менее, вполне возможно на основе небольшого набора фундаментальных индикаторов оценить макроэкономическую ситуацию, выявить тенденцию направления движения рынка, привлекательность отраслей экономики и динамику инвестиционной активности.

Введем следующие обозначения:

- ***P*** – капитализация;
- ***S*** – выручка;
- ***E*** – чистая прибыль;
- ***EBITDA*** – прибыль до уплаты налогов, процентов и амортизации;
- ***EV*** – стоимость компании, т.е. сумма капитализации и денежных средства за вычетом долговых обязательств.

Оценку инвестиционной привлекательности эмитента выполняют с помощью множества различных коэффициентов и параметров [5]. Для конкретизации дальнейшего анализа рассмотрим следующие основные фундаментальные показатели (мультипликаторы):

- ***P/E*** – отношение цены акции к прибыли. Этот коэффициент имеет наибольший вес в мультипликаторном методе. Он позволяет практически сразу получить оценки расчетной стоимости компании;
- ***EV/EBITDA*** – отношение стоимости компании к прибыли до уплаты налогов, процентов и амортизации;
- ***P/S*** – отношение цены акции к доходу компании за год. Этот показатель показывает, сколько инвестор платит за каждый доллар реализации компании;
- ***ROE*** – отношение чистой прибыли компании к среднегодовой величине акционерного капитала. Показатель рентабельности собственного капитала.

Научно обоснованные финансовые решения формируют на основе финансовой модели компании. Наряду с традиционной количественной информацией о состоянии хозяйствующего субъекта, эта модель содержит данные об уровнях неопределенности некоторых параметров модели. Например, точное значение финансового мультипликатора или его вероятностное распределение. Оценка параметра модели может быть представлена на качественном уровне в лингвистической форме – «низкий», «средний» или «высокий» уровень фактора, и т.п.

2. ЭКСПЕРТНАЯ МОДЕЛЬ СКОРИНГА РОССИЙСКИХ АКЦИЙ

Под скорингом ЦБ понимают комплексную оценку инвестиционного качества биржевых активов, которая позволяет:

- ранжировать эмитентов по их инвестиционной привлекательности в пределах выделенной группы, сектора или отрасли экономики;
- формировать рекомендации о покупке / продаже или удержании актива.

Скоринг ЦБ является одним из основных этапов инвестиционного процесса на фондовом рынке. Особое значение он имеет для институциональных инвесторов – банков, пенсионных, инвестиционных и страховых фондов, которые осуществляют систематическое и масштабное инвестирование в фондовые активы.

Экспертная модель инвестиционного качества ЦБ может представлять собой систему фундаментальных финансовых показателей деятельности компаний. Формирование такой модели является одним из основных этапов проектирования системы поддержки принятия решений для управления биржевыми активами. Выбор соответствующих показателей опирается в первую очередь на базу знаний аналитика. Форма организации знаний может быть представлена, например, в виде множества правил. Такого рода правила устанавливают причинно-следственные связи между макро- и микроэкономическими факторами, новостным фоном, финансовыми показателями компаний и т.п., с одной стороны, и ценовой динамикой биржевых активов – с другой. Очевидно, что экспертная модель должна учитывать особенности национальной экономики и биржевого рынка страны, а также их место в мировой экономической системе в целом.

Экспертная модель инвестиционного качества российских ЦБ учитывает следующие особенности российского фондового рынка [6].

- Низкая капитализация. По последним данным Национальной ассоциации участников фондового рынка (НАУФОР), капитализация российских акционерных обществ в 2012 г. составила 817 млрд. долл. Не более десятка российских компаний обладают средней или высокой капитализацией по масштабам американского рынка. Большинство российских компаний по критерию капитализации мелкие.
- Диспропорция капитала. На российском биржевом рынке количество эмитентов в 2012 г. составило 275 компаний. При этом на долю десяти наиболее ликвидных эмитентов приходилось 84,5% от суммарного объема торгов, причем до половины этого оборота приходится на акции Отрытого акционерного общества (ОАО) «Сбербанк России» и ОАО «Газпром».
- Отраслевая диспропорция. Подавляющее большинство российских акций – это бумаги топливно-энергетического комплекса и связи. Практически не представлены все остальные отрасли:
    - торговля;
    - машиностроение;
    - химия;
    - металлургия и т.д.

Достаточно наглядно эту особенность демонстрирует чрезвычайно высокая положительная корреляция котировок индекса Российской торговой системы (РТС) и цен на нефть марки Brent в период с 2007-го по 2010 гг. (рис. 1).

- Техническая слабость. Российский фондовый рынок существенно зависит от фондовых рынков США и Юго-Восточной Азии. Котировки индексов RTS и S&P500 демонстрируют высокую положительную корреляцию (рис. 2). Следствием технической слабости является большая волатильность и фактически непрогнозируемая доходность российских акций.

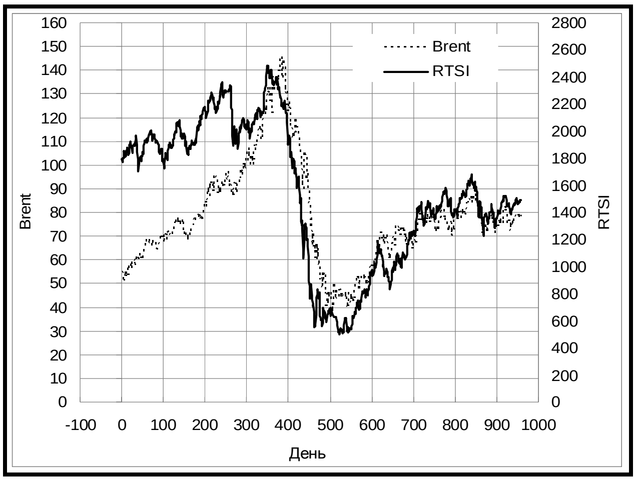

Рис. 1. Сильная положительная корреляция индекса РТС и нефтяных котировок в период с 2007 г. по 2010 г.

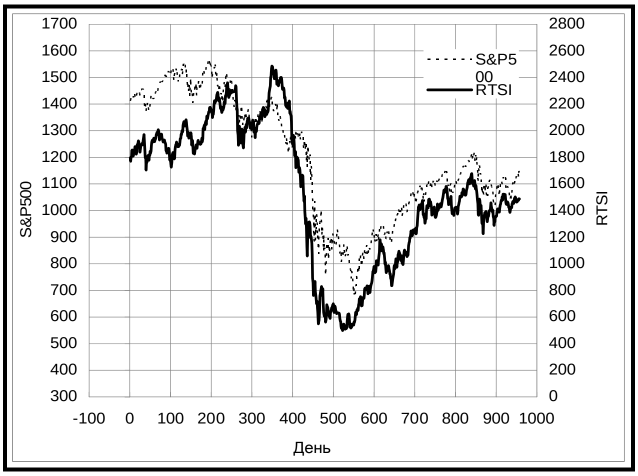

Рис. 2. Сильная положительная корреляция индекса РТС и индекса S&P500 в период с 2007 г. по 2010 г.

В силу сложности прогнозирования российского фондового рынка методами технического анализа оценку инвестиционной привлекательности активов рационально осуществлять на основе анализа соотношения фундаментальных характеристик эмитента и цены биржевого актива [6].

Система оценки инвестиционной привлекательности ЦБ и соответствующие торговые рекомендации должны опираться на экспертную модель предпочтений инвестора в виде набора фундаментальных показателей эмитента. Применительно к российскому фондовому рынку такую шкалу предпочтений рационально представить в виде трех групп факторов [6] (доходность > надежность > эффективность) в порядке убывания их значимости (рангов). В такой системе учтено, что инвестиции в российские акции – это заведомо рискованные вложения.

Прежде всего, инвестор рассчитывает на недооценку российских ЦБ и спекулятивный рост их курсовой стоимости. С этой точки зрения отношение рыночной цены акции P к доходам компании за год E в расчете на одну акцию, т.е. фактор $X_1 = P / E$ (Price to Earnings ratio) в долях – является главным. Этому фактору целесообразно присвоить высший ранг по шкале натуральных чисел, т.е. $r_1 = 1$.

Вторым по значимости является риск дефолта эмитента. Инвестор предпочитает иметь дело с компаниями, которые находятся на подъеме и занимают ощутимую долю на рынке. Поэтому во второй группе целесообразно учесть фактор $X_2 = EV / EBITDA$ в долях. Этому фактору целесообразно присвоить средний ранг, т.е. $r_2 = 2$.

Необходимым условием роста курсовой стоимости ЦБ является рост валового дохода и эффективное управление компании. Поэтому в третьей группе целесообразно учесть следующие факторы:

- отношение рыночной цены акции и продаж $X_3 = P / S$ (Price to Sales ratio) в долях, которое рассчитывается, как отношение рыночной цены акции P к валовому доходу компании за год S в расчете на одну акцию;
- рентабельность собственного капитала (отдача на капитал) $X_4 = ROE$ (Return on Equity) в процентах годовых, т.е. чистые годовые доходы в расчете на одну акцию.

Этой группе факторов целесообразно присвоить наименьший ранг, т.е. $r_3 = 3$. В итоге экспертная модель скоринга российских акций в рамках системы выбранных факторов имеет вид:

$$X_1 \succ X_2 \succ X_3 \approx X_4, \qquad (1)$$

где символы $\succ$ и $\approx$ означают отношения большего предпочтения и эквивалентности показателей.

3. ЭКСПЕРТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ЗНАЧИМОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ИНВЕСТИЦИОННОГО КАЧЕСТВА ЦЕННЫХ БУМАГ

Шкалу предпочтений (1) удобно формировать с помощью процедуры экспертного оценивания, которое представляет собой процесс сравнения факторов по их инвестиционной значимости. Одним из широко применяемых на практике методов экспертного оценивания является взвешивание факторов методом анализа иерархий (парных сравнений) Томаса Саати [7, 8].

Пусть шкала предпочтений состоит из N лингвистических групп важности исходных факторов инвестиционного качества ценных бумаг и n-я текущая группа $\left(n = \overline{1;N}\right)$ содержит $\left(K_n - K_{n-1}\right)$ мультипликаторов, причем $K_0 = 0$. Для каждой группы показателей определим нормированный вес $w_n > 0$. Условие нормировки имеет вид:

$$K_1 w_1 + \left(K_2 - K_1\right) w_2 + \cdots + \left(K_N - K_{N-1}\right) w_N = 1. \qquad (2)$$

Сформируем обратно симметричную матрицу, содержащую N блоков относительных весов:

$$V = \begin{pmatrix} [1] & [v_{12}] & \cdots & [v_{1N}] \\ [v_{21}] & [1] & \cdots & [v_{2N}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [v_{N1}] & [v_{N2}] & \cdots & [1] \end{pmatrix}.$$

Текущий (n,m)-й блок $\lfloor v_{nm} \rfloor$ размером $\left(K_n - K_{n-1}\right) * \left(K_m - K_{m-1}\right)$ содержит одинаковые элементы, равные отношению весов значимости соответствующей пары групп факторов:

$$v_{nm} = w_n / w_m, \ \forall n,m = \overline{1;N}.$$

Ясно, что элементы блоков, расположенных симметрично относительно главной диагонали матрицы, являются обратными по отношению друг к другу:

$$v_{mn} = 1 / v_{nm}, \ \forall n,m = \overline{1;N}. \qquad (3)$$

Блоки матрицы V обладает свойством согласованности, т.е.

$$v_{nm} v_{mk} = \frac{w_n}{w_m} * \frac{w_m}{w_k} = \frac{w_n}{w_k} = v_{nk}, \ \forall n,m,k = \overline{1;N}. \qquad (4)$$

Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы число факторов K_N и блочный вектор – столбец весов:

$$\Big(\underbrace{w_1,\ldots,w_1}_{K_1} \vdots \underbrace{w_2,\ldots,w_2}_{(K_2-K_1)} \vdots \cdots \vdots \underbrace{w_N,\ldots,w_N}_{(K_N-K_{N-1})}\Big)^T$$

являлись соответственно наибольшим собственным значением и главным собственным вектором матрицы V [7, 8].

Процедура экспертного оценивания состоит в формировании коллективом экспертов (опытных финансовых аналитиков) элементов матрицы парных сравнений. Элементы v_{nm} (n,m)-го блока матрицы V фактически показывают во сколько раз значимость факторов, входящих в n-й блок, превосходит значимость факторов, входящих в m-й блок.

В силу свойства (3) при формировании матрицы парных сравнений достаточно определить элементы для $N(N-1)/2$ ее блоков, находящихся по одну сторону от главной диагонали. Элементы блоков на главной диагонали равны единице.

Человек, в силу своих психофизиологических возможностей, может уверенно различать не более девяти градаций признаков. Для парного сравнения относительной важности факторов Саати предложил шкалу лингвистических оценок [7, 8], представленную в табл. 1.

Таблица 1

ЛИНГВИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ВАЖНОСТИ

Лингвистическая оценка	Количественная оценка
Равнозначны	1
Слабое превосходство	3
Сильное превосходство	5
Очень сильное превосходство	7
Абсолютное превосходство	9

Значения 2, 4, 6 и 8 - характеризуют переходные случаи. С учетом свойства обратимости (4) фундаментальная шкала Саати возможных оценок относительной важности факторов является достаточно подробной и содержит значения из числового интервала от 1/9 до 9.

Для предложенных экспертами лингвистических оценок v_{nm} относительной важности финансовых мультипликаторов условие (4) выполняется довольно редко. В такой ситуации мнения экспертов рационально согласовывать на основе оптимального выбора весов значимости показателей [10, 11]. В рамках такого подхода критерием оптимальности вектора весов $\vec{W} = \left(w_1, \ldots, w_N\right)^T$ является минимум среднего квадрата ошибки для аппроксимации матрицы парных сравнений:

$$\vec{W}_{opt} = \arg\min_{\vec{W}}{}^*$$
$$*\left(\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=n+1}^{N} L_{nm}\left\{\left(v_{nm}w_m - w_n\right)^2 + \left(v_{mn}w_n - w_m\right)^2\right\}\right),$$

где $L_{nm} = \left(K_n - K_{n-1}\right)\left(K_m - K_{m-1}\right)$ – количество элементов (n,m)-го блока матрицы парных сравнений. Решение указанной выше задачи квадратичного программирования приводит к системе линейных нормальных уравнений:

$$A\vec{W} = 0\,. \qquad (5)$$

Выражения для расчета элементов проецирующей матрицы $A = \left\{a_{nm}\right\}\Big|_{n=\overline{1,N}}^{m=\overline{1,N}}$ представлены в приложении 1.

4. КОМПРОМИССНОЕ РЕШЕНИЕ

В силу несогласованности мнений экспертов проецирующая матрицу A является, как правило, сингулярной и система уравнений (5) несовместна. Рассмотрим геометрическую интерпретацию этой проблемы. С этой целью проецирующую матрицу представим в блочной форме $A = \left(\vec{A}_1^T \vdots \cdots \vdots \vec{A}_N^T\right)^T$. Текущая вектор – строка $\vec{A}_n = \left(a_{n1}, \ldots, a_{nN}\right)$, $n = \overline{1;N}$ матрицы задает ориентацию гиперплоскости $\vec{p}_n\vec{W} = 0$ в пространстве весов $\left(w_1, \ldots, w_N\right)$. Здесь $\vec{p}_n = \vec{A}_n \Big/ \left\|\vec{A}_n\right\|$ – орт нормали к указанной выше гиперплоскости, а $\left\|\vec{A}_n\right\|$ – норма Евклида вектора $\vec{A}_n$. Если все вектора $\vec{p}_n$, $n = \overline{1;N}$ нормалей к гиперплоскостям лежат в одной гиперплоскости, то система уравнений (5) имеет решение. Иными словами, если матрица A имеет ранг , то существует прямая линия в пространстве весов, через которую проходят все гиперплоскости. Вектор $\vec{W}$, лежащий на этой линии и нормированный в соответствии с условием (2), является оптимальной экспертной оценкой весов.

В противном случае система уравнений (5) несовместна и проблему экспертного оценивания рационально сформулировать как задачу поиска компромиссного решения [3] для следующей системы линейных неравенств (СЛН):

$$\begin{cases} \vec{p}_1\vec{W} - \varepsilon < 0; \\ -\vec{p}_1\vec{W} - \varepsilon < 0; \\ \vdots \\ \vec{p}_N\vec{W} - \varepsilon < 0; \\ -\vec{p}_N\vec{W} - \varepsilon < 0; \\ -w_1 < 0; \\ \vdots \\ -w_N < 0; \\ -w_1 + w_2 < 0; \\ \vdots \\ -w_{N-1} + w_N < 0. \end{cases}$$

Первый блок из $2N$ неравенств учитывает ограничения $\left|\vec{p}_1\vec{W}\right| < \varepsilon$, $n = \overline{1;N}$ на заданную исследователем, как правило, неизбежную погрешность $\varepsilon > 0$ решения системы уравнений (6). Второй блок, содержащий N неравенств, учитывает требование положительности весов. Третий блок, состоящий из $(N-1)$ неравенств, контролирует условие убывания весов из последовательных групп значимости факторов. СЛН удобно записать в матричной транскрипции:

$$Q\vec{W} + \vec{Y} < 0\,. \qquad (6)$$

В состав блочной матрицы $Q = \left(P^T \vdots -P^T \vdots -I^T \vdots J^T\right)^T$ размером $(4N-1)*N$ входят следующие объекты:

$P = \left(\vec{p}_1^{\,T} \vdots \cdots \vdots \vec{p}_N^{\,T}\right)^T$ и I – блочная и единичная матрицы размером $N*N$;

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ – двухдиагональная ленточная матрица размером $(N-1)*N$.

Блочный вектор – столбец $\vec{Y} = \left(-\vec{E}^T \vdots -\vec{E}^T \vdots \vec{Z}^T\right)^T$ – размером $(4N-1)$ формируют следующие объекты:

- $\vec{E} = \left(\varepsilon, \ldots, \varepsilon\right)^T$ – вектор-столбец длиною N;
- $\vec{Z} = \left(0, \ldots, 0\right)^T$ – вектор-столбец, содержащий $(2N-1)$ нулей.

Поиск компромиссного решения несовместной СЛН выполняют с помощью алгоритмов стационарной релаксации, основанной на линейных условиях дополнительности [3]:

$$\begin{cases} B\vec{R} \geq Q\vec{W} + \vec{Y}; \\ \vec{R} \geq 0; \\ \vec{R}^T B\vec{R} = \vec{R}^T\left(Q\vec{W} + \vec{Y}\right). \end{cases}$$

Здесь

$\vec{R} = \left(r_1, \ldots, r_{4N-1}\right)^T$ – вектор-столбец релаксационных переменных длиною $(4N-1)$;

B – весовая матрица потерь размером $(4N-1)*(4N-1)$.

Релаксационные переменные характеризуют возможные нарушения в СЛН. Если k-е неравенство системы не выполняется, то оно ослабляется на величину, пропорциональную $r_k > 0$, $k = \overline{1;(4N-1)}$ в случае диагональной матрицы потерь B. Элементы этой матрицы взвешивают значимость таких нарушений. Если k-е неравенство выполняется с запасом, то $r_k = 0$. Квадратичная форма $\vec{R}^T B\vec{R}$ определяет стоимость всех нарушений. Релаксационные переменные выбирают из условий минимума возможных потерь $\vec{R}_{opt} = \arg\min_{\vec{R}}\left\{\vec{R}^T\left(Q\vec{W} + \vec{Y}\right)\right\}$, что дает двойственную систему уравнений $Q^T\vec{R} = 0$. Алгоритм поиска компромиссного решения, реализующий метод последовательных приближений, представлен в приложении 2.

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКПЕРИМЕНТ

В качестве примера, иллюстрирующего представленную выше методику экспертного оценивания, выполним следующие расчеты. В соответствии со шкалой предпочтений (1) вычислим по формуле:

$$w_n^f = 2\frac{K_N - r_n + 1}{K_N\left(K_N + 1\right)},\ n = \overline{1;N}. \qquad (7)$$

веса Фишберна [9] значимости финансовых мультипликаторов российских акций. Откуда для величин $N = 3$, $K_N = 4$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ и $r_3 = 3$ получим начальные оценки весов $w_1^f = 0{,}4$, $w_2^f = 0{,}3$, $w_3^f = 0{,}2$, и их значения $w_1[0] = 0{,}363$, $w_2[0] = 0{,}273$, $w_3[0] = 0{,}182$, учитывающие условие нормировки (2).

В соответствии с лингвистической шкалой Саати мнения экспертов представим следующей согласованной матрицей парных сравнений:

$$V_C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 1/3 & 1 & 5/3 & 5/3 \\ 1/5 & 3/5 & 1 & 1 \\ 1/5 & 3/5 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Этой матрице отвечают веса значимости факторов, удовлетворяющие равенствам $w_2 = w_1/3$ и $w_3 = w_1/5$, т.е. $w_1 = 1$, $w_2 = 1/3$ и $w_3 = 1/5$. Последующая нормировка $w_1 + w_2 + 2w_3 = 1$ дает контрольные значения для компонентов вектора весов $\vec{W} = \left(0{,}577\ \ 0{,}192\ \ 0{,}115\right)^T$.

Отметим, что полученные величины с учетом условия нормировки (2) совпадают с геометрически интерпретируемой оценкой:

$$\vec{W}_{avr} = \frac{1}{3}\left(\vec{W}_{12} + \vec{W}_{13} + \vec{W}_{23}\right), \qquad (9)$$

где $\vec{W}_{nm} = \vec{P}_{nm} \Big/ \left\| \vec{P}_{nm} \right\|$; $\vec{P}_{nm} = \left[\vec{p}_n * \vec{p}_m\right]$ – векторное произведение. Каждое из слагаемых в указанной выше формуле представляет собой орт, принадлежащий паре плоскостей, ориентация которых в трехмерном пространстве весов определяется нормалями $\vec{p}_n$ и $\vec{p}_m$. Оценка (9) приобретает смысл вектора весов, усредненного по всем парам плоскостей, т.е. по парам строк проецирующей матрицы A. В рамках такого представления согласованность матрицы парных сравнений в случае трех классов значимости факторов уместно измерять показателем:

$$EGV(\alpha) = exp\left\{-\left(Sp_{avr}\right)^{1/\alpha}\right\},\ \alpha \ge 2. \qquad (10)$$

Здесь след

$$Sp_{avr} = \frac{1}{3}\left(D_{12} + D_{13} + D_{23}\right),\ D_{nm} = \left\|\vec{W}_{nm} - \vec{W}_{avr}\right\|^2$$

«ковариационной» матрицы ортов $\vec{W}_{nm}$ – это аналог выборочной оценки обобщенной дисперсии (Generalized Variance) [2, с. 154]. Иными словами, мера согласованности мнений экспертов $EGV \in [0,1]$, обратно пропорциональна степени рассеяния $Sp_{avr} \in [0,\infty)$ ортов $\vec{W}_{nm}$ в пространстве весов. Для согласованной матрицы парных сравнений (8) выполняется равенство $\vec{P}_{12} \equiv \vec{P}_{13} \equiv \vec{P}_{23}$, т.е. три плоскости пересекаются по одной прямой линии, проходящей через начало координат пространства весов. Соответственно критерий (10) принимает значение $EGV(\alpha) \equiv 1$, что указывает на абсолютную согласованность этой матрицы.

Предложенное Саати отношение согласованности (Ratio Consistency) матрицы (8) принимает значение $RC = IC/IR = 1{,}485\ /\ 0{,}89 = 1{,}67 \gg 0{,}08$, что указывает на несовершенство такого рода показателя [1, 3]. Здесь $IC = \left(\lambda_{max} - K_N\right)/\left(K_N - 1\right)$ – индекс согласованности (Index Consistency) экспертных оценок относительных весов значимости v_{nm}, $\forall n,m = \overline{1;N}$ факторов; $\lambda_{max} = 8{,}454$ – наибольшее собственное значение матрицы V_C; IR – значение индекса IC, усредненное по достаточно большому количеству случайно сгенерированных относительных весов.

Альтернативный количественный показатель согласованности матрицы парных сравнений (8) рассчитаем с помощью методики анализа транзитивности предпочтений для троек факторов X_n, X_m, X_k, $\forall n,m,k = \overline{1;K_N}$, представленной в работе [4], по формуле:

$$C = 1 - \frac{1}{s_{max}\, ln^2\left(v_{max}\right)} * \sum_{n=1}^{K_N-2}\ \sum_{m=n+1}^{K_N-1}\ \sum_{k=m+1}^{K_N} ln^2\left(v_{nm}v_{mk}v_{kn}\right), \qquad (11)$$

где

$$s_{max} = \begin{cases} \dfrac{K_N^3 - K_N^2}{2}, K_N - \text{нечетное}, \\ \dfrac{K_N^3 - K_N^2}{2} - K_N,\ K_N - \text{четное}; \end{cases}$$

$v_{max} = 9$ – наибольшее значение кратности предпочтений, выбранное в соответствии со шкалой лингвистических оценок Саати (табл. 1).

Подстановка соответствующих числовых значений в указанную выше формулу дает:

$$C = 1 - \frac{1}{96{,}556}\left\{ ln^2\left(v_{12}v_{23}v_{31}\right) + ln^2\left(v_{12}v_{23}v_{41}\right) + ln^2\left(v_{13}v_{34}v_{41}\right) + ln^2\left(v_{23}v_{34}v_{42}\right)\right\} = 0{,}985,$$

что также подтверждает практически абсолютную согласованность элементов матрицы (8).

Поиск компромиссного решения СЛН (6) выполнялся для единичной матрицы потерь B, что соответствует методу наименьших квадратов [3], а также абсолютной и относительной погрешностей соответственно решения системы линейных нормальных уравнений (5) $\varepsilon = 0{,}001$ и поиска компромиссного решения $\delta = 0{,}001$.

Сходимость алгоритма стационарной релаксации к компромиссному решению за пять итераций по критерию δ демонстрируют рис. 3-5. Рис. 3 иллюстрирует сходимость левых частей $e_n[i] = \vec{p}_n \vec{W}[i]$, n = 1, 2, 3 системы линейных нормальных уравнений (5) к нулю. Были получены следующие финальные невязки:

$$\vec{p}_1 \vec{W}\left[5\right] = -0{,}000627; ,$$

$$\vec{p}_2 \vec{W}\left[5\right] = 0{,}001333;$$

$$\vec{p}_3 \vec{W}\left[5\right] = 0{,}000078 .$$

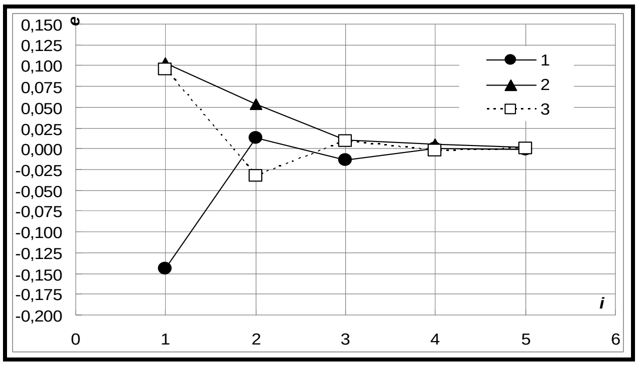

Рис. 3. Сходимость левых частей $e_n\left[i\right]$ системы линейных уравнений для согласованной матрицы парных сравнений: 1 – *n* = 1; 2 – *n* = 2; 3 – *n* = 3

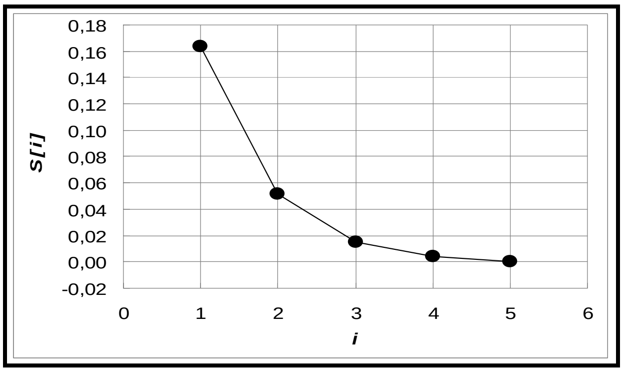

Рис. 4. Зависимость шага коррекции от итераций алгоритма стационарной релаксации для согласованной матрицы парных сравнений

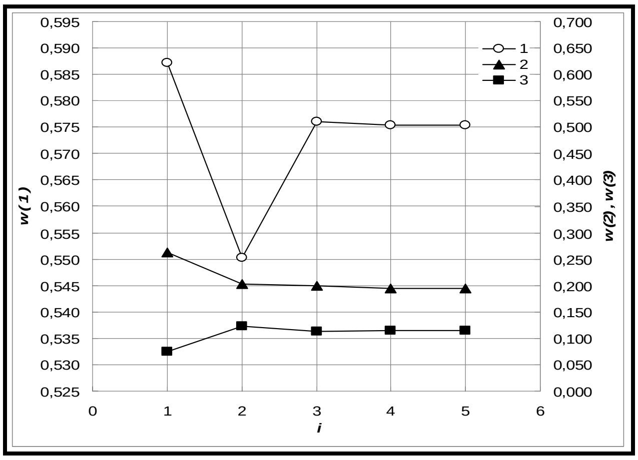

Рис. 5. Сходимость весов значимости факторов к оптимальным значениям для согласованной матрицы парных сравнений: 1 – $w_1\left[i\right]$, 2 – $w_2\left[i\right]$, 3 – $w_3\left[i\right]$

На рис. 4 представлен процесс уменьшения шага коррекции $S\left[i\right] = \left\|\vec{R}\right\|^2 \Big/ \left\|\Delta\vec{W}\left[i\right]\right\|$ компромиссного решения по итерациям i = 1, 2, …, 5.

Процесс сходимости весов значимости финансовых мультипликаторов демонстрирует рис. 5. Финальные оценки весов $w_1\left[5\right] = 0{,}575$, $w_2\left[5\right] = 0{,}194$, $w_3\left[5\right] = 0{,}115$ идеально согласуются с контрольными величинами.

Получим экспертные оценки весов значимости факторов для несогласованной матрицы парных сравнений следующего вида:

$$V_{NC} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1 & 7 & 7 \\ 1/3 & 1/7 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/7 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Количественные показатели согласованности этой матрицы, рассчитанные по формулам (10) и (11), приняли значения $EGV\left(2\right) = 0{,}893$ и $C = 0{,}838$ соответственно.

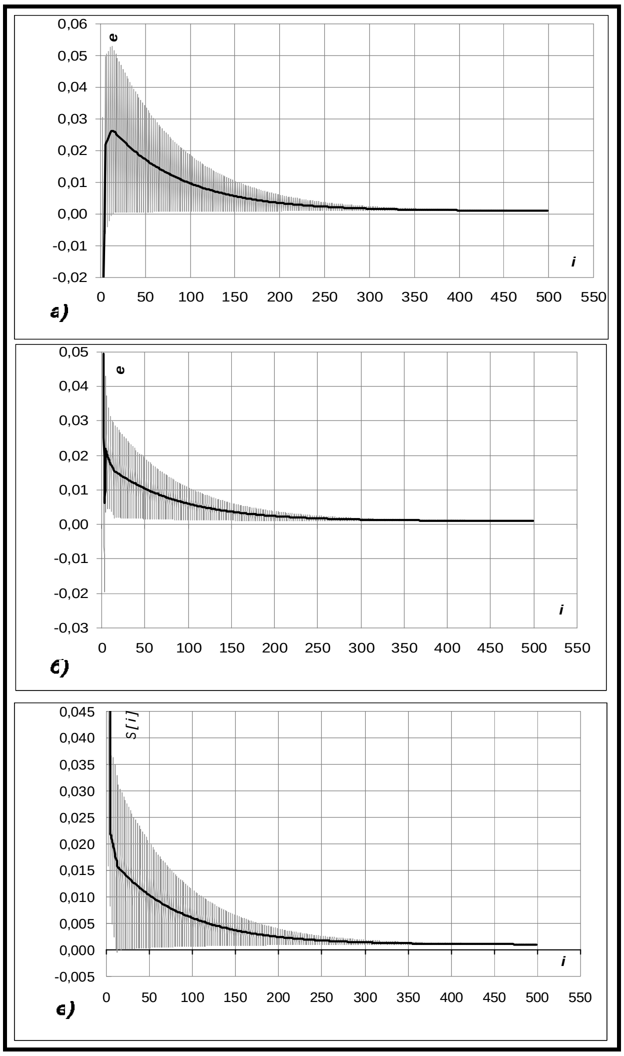

Рис. 6. Неувязки левых частей $e_n\left[i\right]$ системы линейных уравнений для несогласованной матрицы парных сравнений: а) *n* = 1, б) *n* = 2, в) *n* = 3

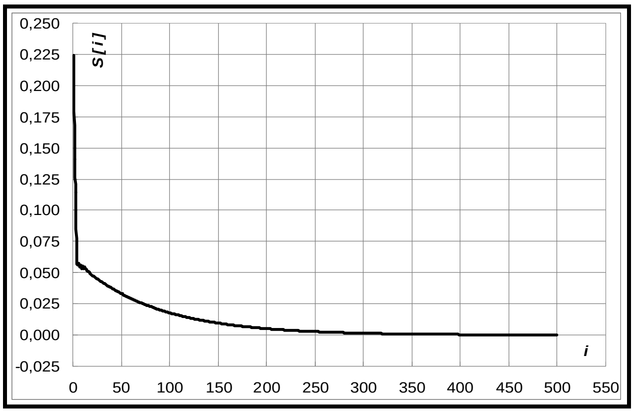

Рис. 7. Зависимость шага коррекции от итераций алгоритма стационарной релаксации для несогласованной матрицы парных сравнений

Сходимость алгоритма стационарной релаксации к компромиссному решению за пятьсот итераций по критериям $\varepsilon = 0{,}001$ и $\delta = 0{,}001$ для единичной матрицы потерь демонстрируют рис. 6-8. Рис. 6 и 7 показывают соответственно сходимость практически к нулю осциллирующих невязок левых частей системы уравнений (5) и процесс уменьшения шага коррекции $S[i]$. Толстые линии на рис. 6 – это результат применения простой скользящей средней с интервалом сглаживания 2 по итерациям i обучения весов.

Уменьшение осцилляций в оценках по мере сходимости весов значимости факторов к оптимальным значениям наглядно иллюстрирует рис. 8. Толстые линии на рисунках – это результат применения простой скользящей средней с интервалом сглаживания 2 по итерациям i обучения весов. В результате были получены следующие оптимальные оценки:

$$w_1[500] = 0{,}661\ ;$$

$$w_2[500] = 0{,}1546\ ;$$

$$w_3[500] = 0{,}0922\ .$$

Этим значениям соответствуют следующие величины невязок $\vec{p}_1\vec{W}[500] = 0{,}001$; $\vec{p}_2\vec{W}[500] = 0{,}0011$; $\vec{p}_3\vec{W}[500] = 0{,}0011$ левых частей системы уравнений (5).

Также отметим, что полученные величины весов хорошо согласуются с геометрически интерпретируемой оценкой, рассчитанной по формуле (9), а именно:

$$w_1 = 0{,}654\ ;$$

$$w_2 = 0{,}158\ ;$$

$$w_3 = 0{,}094\ .$$

Меру несогласованности мнений экспертов и результаты оптимизации весов значимости факторов с помощью алгоритма стационарной релаксации удобно анализировать методом Grand Tur [12] динамической визуализации многомерных данных. В качестве примера такого анализа для несогласованной матрицы парных сравнений (12) на рис. 9 представлена ортогональная проекция точек в трехмерном пространстве весов на картинную плоскость.

Эта плоскость перпендикулярна орту $\vec{W}_{avr}$, отображенному центральной точкой. Три точки расположенные на периферии, отображающие ориентацию ортов $\vec{W}_{12}$, $\vec{W}_{13}$ и $\vec{W}_{23}$, наглядно демонстрируют степень их рассеяния, т.е. меру несогласованности матрицы (12). Пятая точка, расположенная внутри треугольника, отображает компромиссное решение.

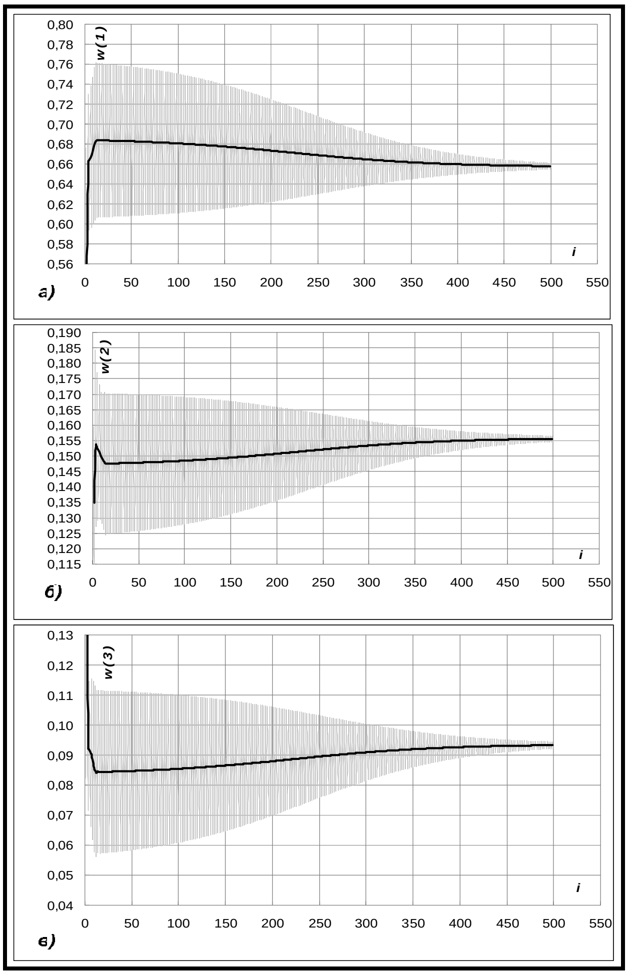

Рис. 8. Сходимость весов значимости факторов к оптимальным оценкам для несогласованной матрицы парных сравнений:
а) - $w_1[i]$, б) - $w_2[i]$, в) - $w_3[i]$

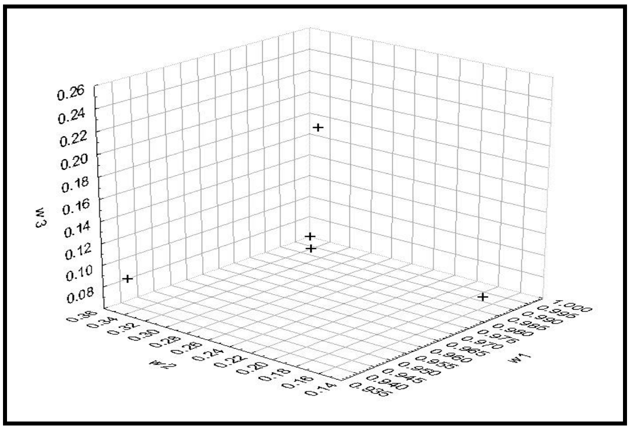

Рис. 9. Точки, отображающие орты в проекции на картинную плоскость

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена методика экспертного оценивания весов значимости факторов методом парных сравнений Т. Саати. На примере цепочки предпочтений инвестора в задаче скоринга российских акций показано, что проблему несогласованности мнений аналитиков рационально формулировать в терминах несовместной СЛН. Поиск компромиссного решения такой системы линейных неравенств с помощью алгоритмов стационарной релаксации позволяет получить оценки весов, оптимальные по критерию минимума для квадрата ошибки аппроксимации матрицы парных сравнений. В рамках такого подхода и трех классов значимости факторов предложен новый, геометрически интерпретируемый показатель согласованности элементов матрицы парных сравнений. В случае значительной несогласованности мнений экспертов алгоритм релаксации для СЛН обеспечивает сходимость к оптимальным значениям при наличии осцилляций текущих оценок весов.

Приложение 1

Формулы для расчета элементов проецирующей матрицы

$$a_{1m}=\begin{cases}\sum\limits_{k=2}^{N}L_{1k}u_{1k}, & m=1;\\ -L_{1m}u_{1m}v_{1m}, & m=\overline{2;N};\end{cases}$$

$$a_{nm}=\begin{cases}-L_{mn}u_{mn}v_{mn}, & m=\overline{1;(n-1)};\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}L_{kn}u_{kn}v_{kn}^{2}+\sum\limits_{k=n+1}^{N}L_{nk}u_{nk}, & m=n;\ n=\overline{2;(N-1)};\\ -L_{nm}u_{nm}v_{nm}, & m=\overline{(n+1);N};\end{cases}$$

$$a_{Nm}=\begin{cases}-L_{mN}u_{mN}v_{mN}, & m=\overline{1;(N-1)};\\ \sum\limits_{k=1}^{N-1}L_{kN}u_{kN}v_{kN}^{2}, & m=N;\ u_{nm}=1+\dfrac{1}{v_{nm}^{2}}.\end{cases}$$

Приложение 2

Алгоритм поиска компромиссного решения

Шаг 0

Инициализация. В соответствии с экспертной моделью (1) в виде шкалы предпочтений показателей выбрать начальные значения весов значимости мультипликаторов по формуле (7) Фишберна [9]. Нормировать веса:

$$w_n[0]=w_n^f\Big/\sum_{m=1}^{N}(K_m-K_{m-1})w_m^f,\ K_0=0,\ n=\overline{1;N}.$$

С учетом лингвистической шкалы Саати (таблица 1) и мнениями экспертов выбрать элементы матрицы $\boldsymbol{V}$ парных сравнений. Задать абсолютную $\varepsilon>0$ и относительную $\delta>0$ погрешности соответственно решения системы линейных нормальных уравнений (5) и поиска компромиссного решения. Выбрать веса штрафов в виде матрицы потерь $\boldsymbol{B}$ за нарушение неравенств системы (6). Задать наибольшее число итераций I_{max}. Положить номер итерации $i=0$.

Шаг 1

Цикл поиска $i=i+1$. Вычислить степени жесткости неравенств:

$$\vec{R}[i]=B^{-1}\left(Q\vec{W}[i]+\vec{Y}\right)^{+}$$

и их евклидову норму $\left\|\vec{R}[i]\right\|$, где вектор $\left(Q\vec{W}[i]+\vec{Y}\right)^{+}$ имеет нулевые компоненты если соответствующие компоненты вектора $\left(Q\vec{W}[i]+\vec{Y}\right)$ отрицательны, т.е. если соответствующие неравенства системы (6) выполняются.

Шаг 2

Вычислить вектор $\Delta\vec{W}[i]=-Q^{T}\vec{R}[i]$ коррекции компромиссного решения и его евклидову норму $\left\|\Delta\vec{W}[i]\right\|$. Если $\left\|\Delta\vec{W}[i]\right\|\le\delta\left\|\vec{W}[i]\right\|$, то решение получено за конечное число шагов. Это первый критерий завершения поиска.

Шаг 3

Вычислить шаг $S[i]=\left\|\vec{R}\right\|^{2}\Big/\left\|\Delta\vec{W}[i]\right\|$ коррекции и вектор $\vec{d}[i]=\Delta\vec{W}[i]\Big/\left\|\Delta\vec{W}[i]\right\|$ направления коррекции. Обновить компромиссное решение:

$$\vec{U}[i]=\left(u_1[i],\cdots,u_N[i]\right)^{T}=\vec{W}[i-1]+S[i]\vec{d}[i].$$

Шаг 4

Нормировать веса

$$w_n[i]=u_n[i]\Big/\sum_{m=1}^{N}(K_m-K_{m-1})u_m[i];\ K_0=0;\ n=\overline{1;N}.$$

Шаг 5

Если $i\le I_{max}$, то продолжить поиск компромиссного решения, начиная с шага 1. В противном случае закончить вычисления.

Литература

1. Абаев Л.Ч. Об одном подходе к оценке непротиворечивости экспертной информации [Текст] / Л.Ч. Абаев // Теория активных систем / Труды междунар. науч.-практ. конф. (17 – 19 ноября 2003 г.). Т. 1 : тез. докл. – М. : ИПУ РАН, 2003. – С. 79-80.
2. Айвазян С.А. и др. Прикладная статистика: основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное изд. [Текст] / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
3. Булавский В.А. Методы релаксации для систем неравенств [Текст] : учеб. пособие [Текст] / В.А. Булавский ; Новосиб. гос. ун-т им. Ленин. комсомола. – Новосибирск : НГУ, 1981. – 82 с.
4. Киселев И.С. Показатель согласованности количественных предпочтений в матрице парных сравнений [Текст] / И.С. Киселев // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318 ; №5. – С. 22-24.
5. Коттл С. «Анализ ценных бумаг» Грэма и Додда [Текст] / С. Коттл, Р.Ф. Мюррей, Ф.Е. Блок ; пер. с англ. – М. : Олимп-бизнес, 2001. – 704 с.
6. Недосекин А.О. Фондовый менеджмент в расплывчатых условиях [Электронный ресурс] / А.О. Недосекин – СПб. : Сезам, 2003. – 200 с. Режим доступа: http://sedok. narod.ru/ index.html
7. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий [Текст] / Т. Саати ; пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1993. – 278 с.
8. Саати Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: аналитические сети [Текст] / Т.Л. Саати ; пер. с англ. – М. : Изд-во ЛКИ, 2008. – 360 с.
9. Фишберн П.С. Теория полезности для принятия решений [Текст] / П.С. Фишберн ; пер. с англ. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
10. Chu A.T.W., Kalaba R.E., Springarn R. A comparison of two methods for determining the weights of belonging to fuzzy

sets // Journal of optimization theory and applications. 1979. Vol. 27. №4. Pp. 531-

11. Fulop J., Koczkodaj W.W., Szarek S.J.A. Different perspective on a scale for pairwise comparisons // Transactions on computational collective intelligence. 2010. Vol. 1. p. 71-84.
12. Buja A., Cook D., Asimov D., Hurley C. Theory and computational methods for dynamic projections in high-dimensional data visualizations // Journal of computational and graphical statistics. 1999. Vol. 8. №3. p. 1-24.

Ключевые слова

Фундаментальный анализ; финансовые мультипликаторы; скоринг акций; метод анализа иерархий; матрица парных сравнений; релаксация системы линейных неравенств; показатель согласованности.

Лабунец Леонид Витальевич
E-mail: labunets@bmstu.ru

Лабунец Елена Леонидовна
E-mail: l.labunets@yandex.ru

Лебедева Наталья Леонидовна
E-mail: labunetsnl@ mail.ru

РЕЦЕНЗИЯ

Разработка систем ранжирования объектов экономического анализа является одним из перспективных направлений формирования современных управленческих инноваций. Классический пример в этом отношении представляют системы скоринга биржевых активов. Рейтингование такого рода объектов связано с необходимостью обоснования системы показателей, характеризующих инвестиционный потенциал ценных бумаг, и оценку весов значимости факторов выбранных экспертами. В частности, не вызывает сомнения актуальность исследования методологии разработки экспертной модели скоринга российских акций, анализу которой посвящена рецензируемая статья Лабунца Л.В., Лабунец Н.Л. и Лебедевой Н.Л.

Научная новизна работы состоит в предложении авторов формулировать проблему экспертного оценивания в рамках метода анализа иерархий в терминах задачи поиска компромиссного решения соответствующей системы линейных неравенств (СЛН). Полученная в статье СЛН позволяет естественным образом учесть все ограничения в форме равенств и неравенств, которые обусловлены несогласованностью мнений экспертов относительно значений для элементов матрицы парных сравнений важности факторов. Метод анализа иерархий подвергается обоснованной критике, но в рамках рецензируемой статьи он играет вспомогательную роль эвристического метода получения приемлемого решения поставленной задачи.

Известно достаточно большое количество методов и алгоритмов решения несовместных СЛН. Примером могут служить проекционные алгоритмы Качмажа, широко применяемые при решении задач реконструктивной вычислительной томографии. Вместе с тем в отечественных и зарубежных научных публикациях не уделено должного внимания эффективности применения методов последовательной релаксации Булавского В.А. при решении СЛН. Рецензируемая работа достаточно убедительно демонстрирует научную значимость и практическую эффективность алгоритмов решения СЛН на основе линейных условий дополнительности.

Практическая значимость работы состоит в том, что получено оригинальное решение для задачи оценки весов важности факторов в экспертной модели скоринга российских акций. Представленные в статье результаты вычислительного эксперимента наглядно иллюстрируют методику оптимизации весов факторов в случае несогласованной в значительной мере матрицы парных сравнений. Важно также отметить, что методика инвариантна к размерности решаемой задачи и содержанию предметной области. Определенную практическую ценность представляет предложенный авторами индекс согласованности матрицы парных сравнений в случае трех классов значимости факторов в модели экспертного оценивания.

Заключение: рецензируемая статья отвечает требованиям, предъявляемым к научным публикациям, и может быть рекомендована к опубликованию.

Орлов А.И., проф., д.т.н., д.э.н., к.ф.-м.н., проф. кафедры «Экономика и организация производства» (ИБМ-2) Научно-учебного комплекса «Инженерный бизнес и менеджмент» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, зав. лабораторией экономико-математических методов в контроллинге Научно-образовательного центра «Контроллинг и управленческие инновации» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана