

УДК 621.031:681.332.5

КУМУЛЯНТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

© 2012 г. Л. В. Лабунец¹, Н. Л. Лебедева, М. Ю. Чижов²

¹Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Российская Федерация, 105005 Москва, 2-я Бауманская ул., 5,

²Российский новый университет, кафедра “Информационные технологии фондового рынка”,
Российская Федерация, 105005 Москва, ул. Радио, 22

Поступила в редакцию 27.12.2011 г.

В рамках метода кумулянтного описания вероятностных распределений А.Н. Малахова получено ковариационное приближение многомерных плотностей и интегралов вероятностей в виде степенного ряда по элементам ковариационной матрицы случайных величин и производным их одномерных интегральных функций распределения. Исследованы необходимые и достаточные условия, при которых характеристическая функция ковариационного приближения положительно определена. Показано, что эти условия рационально формулировать в терминах поиска области допустимых значений для параметров сужения одномерных плотностей распределения вероятностей.

ВВЕДЕНИЕ

При решении многих задач статистической радиотехники и радиотехники, теории управления и систем передачи информации возникает необходимость в представлении многомерных плотностей вероятностей (ПВ) случайных величин (СВ) в виде, удобном для отыскания аналитических выражений интегральных функций распределения (ФР). Решающие указанную проблему известные способы аппроксимации вероятностных законов, как правило, охватывают одномерный и двумерный случаи [1, 2] или многомерное нормальное распределение. Так, в [3] приведено выражение интегральной функции нормального закона в виде степенного ряда по ковариациям.

Известны также общие методы асимптотических аппроксимаций многомерных распределений. В [4] предложены алгоритмы, обобщающие разложение Эджворта в теории возмущений на многомерный случай. Применение указанных методов в целях аналитического описания интегральных ФР не всегда оправдано, так как приводит к неприемлемо большим вычислительным затратам. В работе [5] получено ν -связное приближение N -мерной интегральной функции распределения СВ ($N > \nu + 1$). Однако его практическое применение требует знания ν и $(\nu + 1)$ -мерных интегральных ФР, нахождение которых в конечном виде при значениях $\nu \geq 2$ для подавляющего большинства вероятностных законов оказывается сложным. В данной работе представлен удобный метод аналитического описания многомерных плотностей вероятностей СВ и их интегральных ФР.

1. КУМУЛЯНТНОЕ ОПИСАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Полной и удобной формой задания вероятностного распределения системы СВ X_1, \dots, X_N является бесконечный набор их совместных кумулянтов $\mathfrak{G}_{n_1 \dots n_N}^{X_1 \dots X_N}$ порядков $n_1 + \dots + n_N = 1, 2, \dots$ [6]. Кумулянтному описанию распределения соответствует N -мерная характеристическая функция (ХФ) вида

$$\theta_N(\vec{u}) = \exp \left(\sum_{n_1} \dots \sum_{n_N} \frac{\mathfrak{G}_{n_1 \dots n_N}^{X_1 \dots X_N}}{n_1! \dots n_N!} (ju_1)^{n_1} \dots (ju_N)^{n_N} \right), \quad (1)$$

$$\vec{u} = (u_1, \dots, u_N).$$

На практике основной, а иногда и единственной информацией о системе СВ X_1, \dots, X_N , которую удастся надежно оценить, являются их одномерные плотности вероятности $\varphi_1^{X_1}(x_1), \dots, \varphi_N^{X_N}(x_N)$ и ковариационная матрица $\left\{ \mathfrak{G}_{1,1}^{X_n, X_m} \right\}_{n=1, (N-1)}^{m=(n+1), N}$, которая характеризует статистические связи первого порядка. Вместе с тем известен широкий класс вероятностных распределений, высшие кумулянты которых достаточно малы. Таким образом, одним из возможных способов приближенной аппроксимации многомерных вероятностных законов является пренебрежение взаимными статистическими связями второго и последующих порядков, т.е. замена истинного распределения модельным второго порядка, у которого совместные кумулянты третьего и последующих порядков равны нулю [6]. Модельное приближение ХФ в этом

случае найдем из выражения (1). В результате получим

$$\theta_N^{(2)}(\bar{u}) = \prod_{v=1}^N \theta_1^{X_v}(u_v) \exp(-U); \quad (2)$$

$$U = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=n+1}^N b_{n,m} u_n u_m,$$

где $\theta_1^{X_v}(u_v)$ – одномерная характеристическая функция СВ X_v ; $b_{n,m} = \mathfrak{G}_{1,1}^{X_n, X_m}$ – ковариация случайных величин X_n и X_m .

Разлагая экспоненту в ряд по степеням U и почленно интегрируя по формуле обращения (это возможно, так как в силу свойств одномерных ХФ $\theta_1^{X_v}(u_v)$ члены ряда непрерывны, а сам ряд по признаку Абеля сходится равномерно), получим модельное приближение ПВ второго порядка (в смысле А.Н. Малахова [6]) для системы случайных величин

$$\varphi_N^{(2)}(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} Q_{N,k}(\bar{x}), \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_N)^T; \quad (3)$$

$$Q_{N,k}(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{n=1}^N \theta_1^{X_n}(u_n) \times \exp(-ju_n x_n) U^k du_1 \dots du_N. \quad (4)$$

В частности, при $k = 0$ из (4) по формуле обращения находим приближение многомерной ПВ, не учитывающее статистических связей системы случайных величин

$$Q_{N,0}(\bar{x}) = \prod_{n=1}^N \varphi_1^{X_n}(x_n). \quad (5)$$

Члены ряда (3) связаны между собой рекуррентным дифференциальным соотношением. Из (4) и (2) получим

$$Q_{N,k+1}(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=n+1}^N b_{n,m} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} u_n u_m \prod_{v=1}^N \theta_1^{X_v}(u_v) \exp(-ju_v x_v) U^k du_1 \dots du_N. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что достаточными условиями возможности дифференцирования по переменным $x_n, n = 1, \dots, N$, под знаком интеграла в (4) является сходимость интегралов

$$\int_0^{+\infty} u_n^{k+1} |\theta_1^{X_n}(u_n)| du_n < \infty. \quad (7)$$

Действительно, из приведенного условия и четности функций $|\theta_1^{X_n}(u_n)|$ следует сходимость следующих интегралов при $s = 0, \dots, k + 1$:

$$\int_0^{+\infty} |u_n^s \theta_1^{X_n}(u_n)| du_n < 2 \int_0^1 |u_n^s \theta_1^{X_n}(u_n)| du_n + 2 \int_1^{+\infty} |u_n^{k+1} \theta_1^{X_n}(u_n)| du_n,$$

которые мажорируют интегралы

$$\frac{d^s}{dx_n^s} \{ \varphi_1^{X_n}(x_n) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ju_n)^s \theta_1^{X_n}(u_n) \exp(-ju_n x_n) du_n, \quad (8)$$

$(s = 0, \dots, k + 1).$

С учетом непрерывности подынтегрального выражения в (8) это влечет за собой равномерную сходимость правой части последнего равенства всюду относительно x_n и, как следствие, равномерную сходимость интегралов в (4) и (6) всюду относительно x_1, \dots, x_N .

Кроме того, из равномерной сходимости (8) следует непрерывность одномерных ПВ $\varphi_1^{X_n}(x_n)$ и их производных порядка не выше $(K + 1)$ во всей области существования. Другими словами, предполагая в дальнейшем выполненными условия (7), будем рассматривать одномерные ПВ как непрерывные. Кроме того, предполагают, что производные порядка не выше K также непрерывны и имеют K -й порядок соприкосновения с осью абсцисс на концах области существования. В случае конечного K ряд (3) будем усекать и рассматривать сумму первых $(K + 1)$ членов.

Дифференцируя (4) по переменным x_n и x_m , убеждаемся, что результат с точностью до множителя $(-b_{n,m})$ совпадает с общим членом суммы (6), т.е.

$$Q_{N,k+1}(\bar{x}) = - \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=n+1}^N b_{n,m} \frac{\partial}{\partial x_n \partial x_m} \{ Q_{N,k}(\bar{x}) \},$$

откуда по индукции находим выражение для общего члена ряда (3)

$$Q_{N,k+1}(\bar{x}) = (-1)^k \sum_{n_1=1}^{N-1} \sum_{m_1=n_1+1}^N \dots \sum_{n_{k-1}=1}^{N-1} \sum_{m_{k-1}=n_{k-1}+1}^N \prod_{v=1}^k b_{n_v, m_v} \times \frac{\partial^{2k} Q_{N,0}(\bar{x})}{\partial x_{n_1} \partial x_{m_1} \dots \partial x_{n_k} \partial x_{m_k}}. \quad (9)$$

Подставляя формулу (9) в выражение (3) и записывая результат в форме степенного ряда по элементам ковариационной матрицы, с учетом начальной аппроксимации (5) окончательно по-

лучим ковариационное приближение многомерной ПВ

$$\Phi_N^{(2)}(\bar{x}) = \sum_{k_{1,2}} \dots \sum_{k_{(N-1),N}} \frac{b_{1,2}^{k_{1,2}} \dots b_{(N-1),N}^{k_{(N-1),N}}}{k_{1,2}! \dots k_{(N-1),N}!} \times \prod_{m=1}^N \frac{d^{k_m+1}}{dx_m^{k_m+1}} \{ \Phi_1^{X_m}(x_m) \}. \tag{10}$$

Здесь $\Phi_1^{X_m}(x_m)$ – одномерная интегральная ФР случайной величины X_m , а индексы суммирования – суть элементы верхней треугольной матрицы $\{k_{n,m}\}_{n=1,(N-1),N}^{m=(n+1),N}$, принимающие целые неотрицательные значения из области

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=n+1}^N k_{n,m} \leq K; \quad k_m = \sum_{n=1}^{m-1} k_{n,m} + \sum_{n=m+1}^N k_{m,n}.$$

Выражение (10) аппроксимирует многомерную ПВ случайных величин взвешенной суммой произведений одномерных плотностей и их производных с весовыми коэффициентами в виде степеней недиагональных элементов ковариационной матрицы.

2. КОВАРИАЦИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

При интегрировании ряда (10) по N -мерному параллелепипеду с ребрами, параллельными осям координат, переменные разделяются, что позволяет формально получить модельное приближение интегральной функции распределения второго порядка

$$\Phi_N^{(2)}(\bar{x}) = \sum_{k_{1,2}} \dots \sum_{k_{(N-1),N}} \frac{b_{1,2}^{k_{1,2}} \dots b_{(N-1),N}^{k_{(N-1),N}}}{k_{1,2}! \dots k_{(N-1),N}!} \times \prod_{m=1}^N \frac{d^{k_m}}{dx_m^{k_m}} \{ \Phi_1^{X_m}(x_m) \}. \tag{11}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что модельные распределения (10) и (11) удовлетворяют следующим основным свойствам вероятностных законов:

- $\Phi_N^{(2)}(x_1, \dots, x_{n-1}, \infty, x_{n+1}, \dots, x_N) = \Phi_{N-1}^{(2)}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, \dots, x_N)$;
- $\Phi_N^{(2)}(\infty, \dots, \infty) = 1$;
- $\lim_{x_n \rightarrow -\infty} \Phi_N^{(2)}(\bar{x}) = 0, (n = 1, \dots, N)$;
- $\Phi_N^{(2)}(\bar{x})$ и $\Phi_N^{(2)}(\bar{x})$ – всюду непрерывны по x_1, \dots, x_N ,

а также дополнительным свойствам:

- $\int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_n x_m \Phi_N^{(2)}(\bar{x}) dx_1 \dots dx_N = b_{n,m} + \langle X_n \rangle \langle X_m \rangle; \{n = 1, \dots, (N-1); m = (n+1), \dots, N\}$;
- $\lim_{b_{n,m} \rightarrow 0} \Phi_N^{(2)}(\bar{x}) = \Phi_1^{X_n}(x_n) \Phi_{N-1}^{(2)}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, \dots, x_N); (m = 1, \dots, N; n \neq m)$.

В последнем равенстве n – фиксировано. Вместе с тем усечение бесконечного ряда совместных кумулянтов системы случайных величин X_1, \dots, X_N , а также усечение ряда (3) конечным числом членов разложения K может привести к отрицательным значениям модельного приближения ПВ, в особенности на ее “хвостах”. Кроме того, ряд (10) может вести себя нерегулярно в том смысле, что сумма K его членов может давать худшее приближение к истинной ПВ, чем сумма $(K-1)$ членов.

Выясним, каким ограничениям должны удовлетворять корреляционные связи и одномерные кумулянты случайных величин X_1, \dots, X_N , чтобы функция (2) была положительно определенной, т.е. действительно являлась характеристической. Для этого модельное приближение (2) представим в виде

$$\theta_N^{(2)}(\bar{u}) = \theta_N^{(G)}(\bar{u}|\bar{h}) \prod_{n=1}^N \theta_1^{X_n^{(C)}}(u_n|h_n), \quad \bar{h} = (h_1, \dots, h_N) \tag{12}$$

Квадратичная форма

$$\theta_N^{(G)}(\bar{u}|\bar{h}) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N h_n b_{n,n} u_n^2 - U\right) \tag{13}$$

по своей структуре совпадает с ХФ N -мерного гауссовского распределения с нулевым вектором математического ожидания (МО) и ковариационной матрицей

$$\mathbf{B}(\bar{h}) = \begin{pmatrix} h_1 b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,N} \\ b_{1,2} & h_2 b_{2,2} & \dots & b_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1,N} & b_{2,N} & \dots & h_N b_{N,N} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Функция

$$\theta_1^{X_n^{(C)}}(u_n|h_n) = \theta_1^{X_n}(u_n) \exp\left(\frac{1}{2} h_n b_{n,n} u_n^2\right) \tag{15}$$

получена из ХФ случайной величины X_n путем уменьшения ее дисперсии

$$b_{n,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_n^2 \phi_1^{X_n}(x_n) dx_n - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_n \phi_1^{X_n}(x_n) dx_n \right)^2$$

на величину $h_n b_{n,n}$, ($0 \leq h_n \leq 1$). Из равенства (15) непосредственно следует

$$\theta_1^{X_n}(u_n) = \theta_1^{X_n^{(C)}}(u_n|h_n) \exp\left(-\frac{1}{2} h_n b_{n,n} u_n^2\right),$$

откуда в соответствии со свойствами преобразования Фурье нетрудно получить интегральное уравнение Фредгольма первого рода типа свертки

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi h_n b_{n,n}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^{X_n^{(C)}}(z_n|h_n) \exp\left\{-\frac{(z_n - x_n)^2}{2h_n b_{n,n}}\right\} dz_n = \varphi_1^{X_n}(x_n) \quad (16)$$

относительно распределения $\varphi_1^{X_n^{(C)}}(x_n|h_n)$ с Фурье-образом $\theta_1^{X_n^{(C)}}(u_n|h_n)$. Иными словами, параметры h_1, \dots, h_N удобно интерпретировать как параметры сужения истинных одномерных ПВ $\varphi_1^{X_1}(x_1), \dots, \varphi_1^{X_N}(x_N)$ [7]. Таким образом, задача анализа положительной определенности модельного приближения (2) сводится к поиску значений вектора параметров сужения $\vec{h} = (h_1, \dots, h_N)$, при которых функции (13) и (15) положительно определены.

Известно, что симметричная матрица $\mathbf{B}(\vec{h}) = \mathbf{U}(\vec{h})\mathbf{\Lambda}(\vec{h})\mathbf{U}^T(\vec{h})$ является положительно определенной, если все диагональные элементы $\lambda_n(\vec{h}), n = 1, \dots, N$, матрицы собственных значений $\mathbf{\Lambda}(\vec{h})$ положительны [8]. Здесь $\mathbf{U}(\vec{h})$ – матрица собственных векторов. В этом случае матрица $\mathbf{B}(\vec{h})$ является ковариационной, а функция (13) представляет собой ХФ системы случайных гауссовских величин $X_1^{(G)}, \dots, X_N^{(G)}$ [9].

Вместе с тем, если $h_n = 0$, то функция (15) тождественно совпадает с истинной ХФ $\theta_1^{X_n}(u_n)$. Геометрически это означает, что в бесконечномерном пространстве кумулянтных коэффициентов точка, отображающая вероятностное распределение $\varphi_1^{X_n}(x_n)$, находится внутри подпространства, так называемого P -множества [6, с. 47], точкам которого отвечает положительная определенность ХФ. По мере увеличения параметра сужения h_n дисперсия $(1 - h_n) b_{n,n}$ некоторой случайной величины $X_n^{(C)}$ будет уменьшаться, а кумулянтные коэффициенты

$$\gamma_{n,s}(h_n) = \vartheta_s^{X_n} / \{(1 - h_n) b_{n,n}\}^{s/2}, \quad s = 3, 4, \dots$$

расти. Точка, отображающая функцию $\theta_1^{X_n}(u_n|h_n)$, будет удаляться от начала координат бесконечномерного пространства кумулянтных коэффициентов и приближаться к границе P -множества.

С практической точки зрения поиск области допустимых значений параметров сужения одномерных плотностей $\varphi_1^{X_1}(x_1), \dots, \varphi_1^{X_N}(x_N)$, при которых функции (13) и (15) положительно определены, рационально выполнять на сетке N -мерного пространства $(h_1, \dots, h_N) \in \mathfrak{R}^N$ с помощью численного анализа собственных значений $\lambda_n(\vec{h}), n = 1, \dots, N$, матрицы $\mathbf{B}(\vec{h})$ и решения интегральных уравнений (16) методами регуляризации А.Н. Тихонова [10, с. 267].

3. СМЕСЬ ОДНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С МНОГОМЕРНЫМ ГАУССОВСКИМ ЯДРОМ

В соответствии со свойствами преобразования Фурье ковариационному приближению (12) истинной ХФ $\theta_N(\vec{u})$ отвечает модель P -смеси [11, с. 187]

$$\varphi_N^{(2)}(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_N^{(G)}\{\vec{z} - \vec{x}|\vec{h}\} \prod_{n=1}^N \varphi_1^{X_n^{(C)}}(z_n|h_n) d\vec{z},$$

$$\vec{z} = (z_1, \dots, z_N)^T$$

одномерных распределений $\varphi_1^{X_n^{(C)}}(x_n|h_n), n = 1, \dots, N$, с многомерным гауссовским ядром

$$\varphi_N^{(G)}\{\vec{x}|\vec{h}\} = \exp\left\{-\vec{x}^T \mathbf{B}^{-1}(\vec{h}) \vec{x} / 2\right\} / \sqrt{(2\pi)^N \det[\mathbf{B}(\vec{h})]}.$$

С этой точки зрения, исходную систему СВ пытаются аппроксимировать суммой двух структурных составляющих $\vec{X} = \vec{X}^{(G)} + \vec{X}^{(C)}$. Здесь $\vec{X}^{(G)} = (X_1^{(G)}, \dots, X_N^{(G)})^T$ – гауссовская совокупность с нулевым вектором МО и ковариационной матрицей $\mathbf{B}(\vec{h})$; $\vec{X}^{(C)} = (X_1^{(C)}, \dots, X_N^{(C)})^T$ – случайный вектор со статистически независимыми компонентами, каждая из которых может иметь негауссовскую ПВ $\varphi_1^{X_n^{(C)}}(x_n|h_n), n = 1, \dots, N$. Такое представление удобно, например, для цифрового моделирования случайного вектора с заданными негауссовыми одномерными законами распределения и ковариационными связями его компонентов.

В конечном итоге решение задачи аппроксимации случайного вектора \vec{X} суммой гауссовской $\vec{X}^{(G)}$ и негауссовской $\vec{X}^{(C)}$ составляющих рационально свести к двум вычислительным этапам. На первом этапе анализируют собственные значения $\lambda_n(\vec{h}), n = 1, \dots, N$, матрицы $\mathbf{B}(\vec{h})$ на сетке N -мерного единичного куба в пространстве параметров сужения $0 \leq h_1, \dots, h_N \leq 1$. Результатом этого

численного анализа является дискриминантная гиперповерхность

$$\det[\mathbf{B}(\vec{h})] = \prod_{n=1}^N \lambda_n(\vec{h}) = 0$$

(назовем ее λ -границей), точкам которой отвечает положительная полуопределенность матрицы $\mathbf{B}(\vec{h})$. Иными словами, λ -граница указывает минимально возможные значения параметров сужения $\vec{h}_{\min} = (h_1^{(\min)}, \dots, h_N^{(\min)})$, при которых все собственные значения матрицы $\mathbf{B}(\vec{h})$ неотрицательны $\lambda_n(\vec{h}_{\min}) \geq 0, n = 1, \dots, N$, и хотя бы одно из них в диапазоне нуля.

Практический интерес представляет область значений параметров сужения (назовем ее H -множеством), обеспечивающих положительную определенность матрицы $\mathbf{B}(\vec{h})$. Ясно, что эта область содержит вершину куба $h_1 = \dots = h_N = 1$ и в окрестности ее λ -границы матрица $\mathbf{B}(\vec{h})$ имеет неполный ранг, в лучшем случае $(N - 1)$. Вычислительные затраты первого этапа в некоторых случаях можно существенно сократить, если анализировать часть H -множества в виде усеченного гиперкуба $h_{\min} \leq h_n \leq 1, n = 1, \dots, N$. Здесь наименьшее значение параметров сужения $h_1^{(\min)} = \dots = h_N^{(\min)} = h_{\min}$ выбирают из условия $\varepsilon \geq \min\{\lambda_1(h_{\min}), \dots, \lambda_N(h_{\min})\} > 0$, где ε – заданный пользователем уровень значимости наименьшего собственного значения матрицы $\mathbf{B}(\vec{h}_{\min})$.

На втором этапе решают интегральные уравнения (16) для выбранных значений параметров сужения h_1, \dots, h_N из H -множества. Очевидно, что по мере удаления этого множества от λ -границы и приближения к вершине куба $h_1 = \dots = h_N = 1$ обусловленность ковариационной матрицы $\mathbf{B}(\vec{h})$ улучшается. Однако увеличение параметра сужения h_n приводит к уменьшению дисперсии $(1 - h_n)b_{n,n}$ случайной величины $X_n^{(C)}$, что, в свою очередь, может приводить к появлению отрицательных выбросов на “хвостах” решения $\varphi_1^{X_n^{(C)}}(x_n | h_n)$ уравнения (16). В такой ситуации рациональным является применение принципа реализуемости, который состоит в следующем.

В качестве тестовых параметров сужения исходных одномерных ПВ выбирают значения из центральной области H -множества, например $h_n = (h_{\min} + 1)/2, n = 1, \dots, N$. Простой и, как правило, эффективный в вычислительном отношении алгоритм решения уравнения (16) основан на ме-

тоде обращения свертки [12, с. 134]. Метод состоит в замене интеграла (16) его квадратурным приближением

$$\sum_{m=0}^{M_n} \varphi_1^{X_n^{(C)}}(x_{nm} | h_n) g\{(k - m)\Delta x_n | h_n\} = \varphi_1^{X_n}(x_{nk});$$

$$g\{k\Delta x_n | h_n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_n b_{n,n}}} \exp\left\{-\frac{(k\Delta x_n)^2}{2h_n b_{n,n}}\right\},$$

$$k = 0, \dots, M_n.$$

Здесь M_n и $\Delta x_n = \{x_n^{\max} - x_n^{\min}\} / M_n$ – количество интервалов дискретизации и их величина для плотности вероятности $\varphi_1^{X_n}(x_n)$, заданной набором значений $\varphi_{nk} = \varphi_1^{X_n}(x_{nk})$ в диапазоне $x_n^{(\min)} \leq x_n \leq x_n^{(\max)}$ для дискретных отсчетов $x_{nk} = x_n^{(\min)} + k\Delta x_n$. Полученную систему линейных уравнений относительно неизвестных значений $\varphi_{nk}^{(C)} = \varphi_1^{X_n^{(C)}}(x_{nk} | h_n)$, $k = 0, \dots, M_n$, модифицированного распределения $\varphi_1^{X_n^{(C)}}(x_n | h_n)$ удобно представить в матричной форме

$$\mathbf{G}_n \vec{\varphi}_n^{(C)} = \vec{\varphi}_n, \quad \vec{\varphi}_n^{(C)} = (\varphi_{n1}^{(C)}, \dots, \varphi_{nM_n}^{(C)})^T,$$

$$\vec{\varphi}_n = (\varphi_{n1}, \dots, \varphi_{nM_n})^T,$$

где $\mathbf{G}_n = \{g_{k,m}^{(n)}\}$, $(k, m = 0, 1, \dots, M_n)$, – симметричная матрица Грина размером $(M_n + 1) \times (M_n + 1)$. В соответствии с теоремой Мичелли гауссовские веса $g_{k,m}^{(n)} = g\{(k - m)\Delta x_n | h_n\}$ обеспечивают несингулярность матрицы \mathbf{G} , т.е. ее обратимость. (В дальнейшем для сокращения записи, там где это не вызвано необходимостью, индекс n одномерного распределения будем опускать.)

Регуляризованная система линейных уравнений имеет вид

$$\mathbf{F} \vec{\varphi}^{(C)} = \vec{\varphi}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{G} + \eta \mathbf{I}_{M+1},$$

где \mathbf{I}_{M+1} – единичная матрица, размер которой $(M + 1) \times (M + 1)$; $\eta \geq 0$ – параметр регуляризации, значение которого выбирают методом скользящей проверки. Численное решение полученной системы уравнений находят, например, с помощью итерационного алгоритма Гаусса–Зейделя [12, с. 138]

$$\vec{\varphi}^{(C)}[i] = \vec{\varphi}^{(C)}[i - 1] + \mu \vec{E}[i - 1],$$

$$\vec{E}[i - 1] = \vec{\varphi} - \mathbf{F} \vec{\varphi}^{(C)}[i - 1], \quad i = 1, 2, \dots$$

и ограничений типа неравенств

$$\varphi_1^{(C)} \geq 0, \dots, \varphi_M^{(C)} \geq 0,$$

где i – номер итерации; $1 \leq \mu \leq 2$ – параметр скорости сходимости алгоритма. Вычисления продолжают, если выполняются критерии наибольшего числа итераций $i \leq I_{\text{макс}}$ и заметного изменения среднего квадрата ошибок

$$|e[i + 1] - e[i]| > \epsilon e[i], \quad e[i] = \|\bar{E}[i]\|^2,$$

где $\epsilon > 0$ – заданный пользователем уровень значимости.

В соответствии с принципом реализуемости в качестве начального приближения $\bar{\varphi}^{(C)}[0]$ модифицированного распределения естественно выбрать результат масштабирования исходной ПВ $\bar{\Phi}$, т.е.

$$\begin{aligned} \Phi_1^{X_n^{(C)}}(y_{nk}|h_n) &= \\ &= \begin{cases} \frac{\Phi_1^{X_n}(x_{nk})}{\beta_n}, & y_n^{(\text{мин})} \leq y_{nk} \leq y_n^{(\text{макс})} \\ 0, & x_n^{(\text{мин})} \leq y_{nk} < y_n^{(\text{мин})} \cup y_n^{(\text{макс})} < y_{nk} \leq x_n^{(\text{макс})}. \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $y_{nk} = \alpha_n + \beta_n(x_{nk} - \alpha_n)$, $k = 0, \dots, M_n$ – сетка дискретизации модифицированной ПВ, заданной в диапазоне $y_n^{(\text{мин})} \leq y_n \leq y_n^{(\text{макс})}$, где

$$y_n^{(\text{мин})} = \alpha_n + \beta_n(x_n^{(\text{мин})} - \alpha_n);$$

$$y_n^{(\text{макс})} = \alpha_n + \beta_n(x_n^{(\text{макс})} - \alpha_n).$$

Опыт цифрового моделирования показал, что характеристики положения α_n и масштаба β_n в преобразовании (17) целесообразно согласовывать с соответствующими робастными статистиками исходной ПВ. Например, в случае унимодального распределения $\Phi_1^{X_n}(x_n)$ рациональным является выбор

$$\alpha_n = \max_x \{\Phi_1^{X_n}(x_n)\} + a_n(h_n); \quad \beta_n = \sqrt{1 - h_n} + d_n(h_n).$$

Параметры подгонки $a_n(h_n)$ и $d_n(h_n)$ оптимизируют по критерию минимума среднего квадрата ошибок

$$(a, d)_{\text{опт}} = \text{Arg min}_{a, d} \|\bar{\Phi} - F\bar{\Phi}^{(C)}[0]\|^2.$$

4. КОВАРИАЦИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ МНОГОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу аппроксимации случайного многомерного вектора $\bar{X} = (x_1, \dots, x_N)^T$ суммой гауссовской $\bar{X}^{(G)}$ и негауссовской $\bar{X}^{(C)}$ компонент. В качестве исходных данных исследовался набор финансовых мультипликаторов $x_1 = \ln(P/E)$, $x_2 = \ln(P/S)$, $x_3 = \ln(EV/E \text{ bitda})$, $x_4 = \ln(\text{Roe})$, применяемых для фундаментального анализа инве-

Таблица 1. ЭВО ковариационной матрицы данных

$\{b_{n,m}\}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0.033860	0.013729	0.022987	-0.015907
x_2	0.013729	0.038261	0.003869	0.005755
x_3	0.022987	0.003869	0.030602	-0.014186
x_4	-0.015907	0.005755	-0.014186	0.037440

Таблица 2. Собственные значения λ_n , ($n = 1, \dots, 4$) ковариационных матриц для различных параметров сужения h

h	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1.0	0.071314	0.043984	0.017806	0.007060
0.9	0.067917	0.040194	0.014308	0.003728
0.8	0.064523	0.036405	0.010815	0.000400

стиционного качества акций. Выборка $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_K$ ($K = 108$) такого рода показателей и их смысл представлены на сайте [13]. Данные логарифмировались и очищались от выбросов на этапе предварительной обработки. Границы кластера типичных значений четырех ($N = 4$) мультипликаторов формировались по правилу “трехсигмовой” области [14, с. 82]

$$|D_\xi - 1| \leq 3\sigma_\xi,$$

$$\sigma_\xi = \frac{1}{\sqrt{KN}} \sqrt{\frac{(2 + 4\xi + 3\xi^2)(1 + \xi)^{N/2}}{(1 + 2\xi)^{N/2+2}}} - 2,$$

ограниченной поверхностью гиперэллипсоида

$$D_\xi = \frac{1}{KN} \sum_{k=1}^K (\bar{X}_k - \bar{E}_\xi)^T \mathbf{B}_\xi^{-1} (\bar{X}_k - \bar{E}_\xi).$$

Здесь \bar{E}_ξ и \mathbf{B}_ξ – экспоненциально взвешенные оценки (ЭВО) Мешалкина для вектора математического ожидания и ковариационной матрицы данных; $\xi = 1/2$ – параметр эффективности статистик, устойчивых к засорениям. В табл. 1 представлены ЭВО элементов $\{b_{n,m}\}_{n=1, N}^{m=1, N}$ ковариационной матрицы мультипликаторов, полученной в результате итерационного решения системы нелинейных уравнений [14, с. 75].

На первом этапе анализировались собственные значения $\lambda_n(h)$, ($n = 1, \dots, 4$) ковариационной матрицы (14) $\mathbf{B}_\xi(h)$ в зависимости от параметров сужения $h_1 = \dots = h_4 = h$ одномерных распределений мультипликаторов. Результаты расчетов приведены в табл. 2. Окрестность λ -границы области положительной определенности матрицы $\mathbf{B}_\xi(h)$

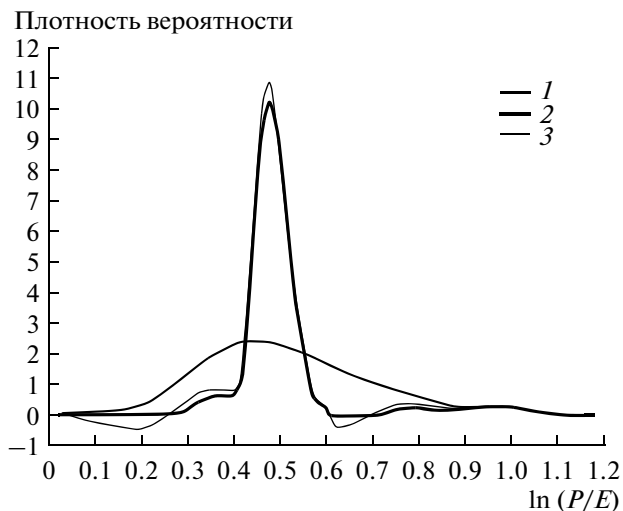


Рис. 1. Исходное распределение (1) и решения интегрального уравнения: с ограничениями (2), без ограничений (3).

соответствует наименьшему значению параметра сужения $h_{\min} = 0.8$.

На втором этапе исследовались решения $\varphi_1^{X_n^{(C)}}(x_n|h)$ интегрального уравнения (16) для параметра сужения $h = 0.9$ одномерных ПВ $\varphi_1^{X_n}(x_n)$. Численные решения получали методом обращения свертки с помощью итерационного алгоритма Гаусса–Зейделя со следующими параметрами регуляризации и скорости сходимости: $\eta = 1.0$ и $\mu = 1.5$ соответственно. Критерии продолжения вычислений формулировались для параметров $I_{\max} = 5$ и $\varepsilon = 0.002$.

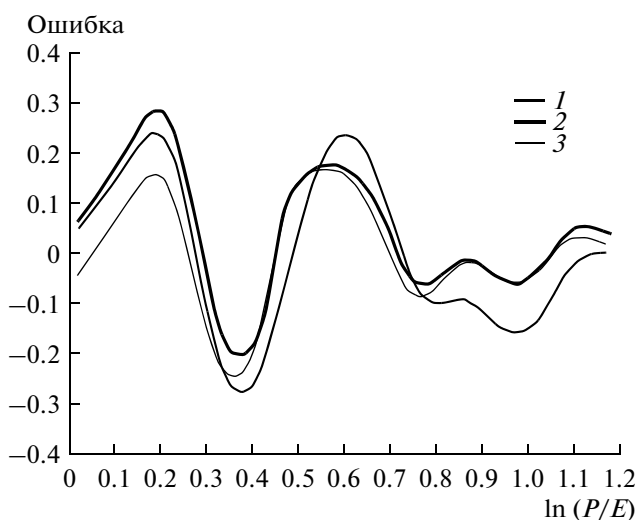


Рис. 2. Ошибки аппроксимации исходного распределения для начального приближения (1) и решений интегрального уравнения: с ограничениями (2), без ограничений (3).

Метод обращения свертки хорошо согласуется с выборочной оценкой распределения $\varphi_1^{X_n}(x_n)$ в виде гистограммы, сглаженной сдвигом (Average Shifted Histogram - ASH) [15]

$$\varphi_1^{X_n}(x_{nk}) = \frac{1}{K\delta_n} \sum_{m=1-m_n}^{m_n-1} w(m) \vartheta_{k+m};$$

$$x_{nk} = x_n^{(\min)} + k\Delta x_n; k = 0, \dots, M_n;$$

$$M_n = \{x_n^{(\max)} - x_n^{(\min)}\} / \Delta x_n.$$

Здесь $\delta_n = 2IQ_n/\sqrt[3]{K}$ – робастная оценка ширины разрядных интервалов (bins) Фридмана–Дьякониса [15]; IQ_n – интерквартильный диапазон n -го мультипликатора; $\Delta x_n = \delta_n/m_n$ и m_n – ширина “суженных” интервалов (narrow bins) и их количество; ϑ_k – количество наблюдений, попавших в k -й “суженный” интервал ($\vartheta_k = 0$, если $k < 0$ или $k \geq M_n$). Окно данных $w(m)$ выбирают из условия

$$\sum_{m=1-m_n}^{m_n-1} w(m) = m_n.$$

В этом случае гистограмма интегрируема с единицей. Такой нормировке удовлетворяет обобщенное окно вида

$$w(m) = m_n \text{Ker}(m/m_n) / \sum_{i=1-m_n}^{m_n-1} \text{Ker}(i/m_n),$$

где $\text{Ker}(u)$ – положительная четная функция ядра, заданная на стандартном интервале $[-1; 1]$ и интегрируемая с единицей. Популярные модели ядерных функций приведены в [15, с. 140].

Начальные приближения $\bar{\varphi}_n^{(C)}[0]$, $n = 1, \dots, 4$, для решений интегрального уравнения (16) формировались в виде масштабированных распределений (17) с оптимальными параметрами подгонки характеристик положения $a_n(h) = 0.035$ и масштаба $d_n(h) = -0.1$.

В качестве примера на рис. 1 представлена ASH-оценка исходного распределения (кривая 1) мультипликатора $x_1 = \ln(P/E)$, преобразованного к стандартному диапазону $[0, 1]$, а также решения уравнения (16) с помощью регуляризованного алгоритма Гаусса–Зейделя после третьей итерации с учетом ограничений в виде неравенств (кривая 2) и без учета ограничений (кривая 3). Рис. 2 иллюстрирует ошибки $\vec{E}[i] = (e_1[i], \dots, e_{M_1}[i])$ аппроксимации исходной ПВ $\bar{\varphi}_1$ с помощью начального приближения $\bar{\varphi}_1^{(C)}[0]$ (кривая 1) и решений $\bar{\varphi}_1^{(C)}[3]$ с учетом ограничений (кривая 2) и без учета ограничений (кривая 3). Процесс сходимости итера-

ционного алгоритма Гаусса–Зейделя по критерию изменения среднего квадрата ошибок $e[i], i = 1, \dots, 5$, представлен на рис. 3. Начальному приближению решения уравнения (16) отвечает средняя квадратичная ошибка $e[0] = 0.1518$. Три итерации алгоритма обеспечивают снижение ошибки до значений 0.1307 и 0.1091 в случае учета ограничений (кривая 1) и без учета ограничений (кривая 2).

5. КОВАРИАЦИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРАЛА ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Возможность практического применения многомерных модельных распределений существенно зависит от скорости сходимости и регулярного поведения рядов (10) и (11). Ясно, что эти ряды сходятся медленно, если $|b_{n,m}| \rightarrow \sqrt{b_{n,n}b_{m,m}}$ и нельзя ограничиться малым числом членов разложения [3]. Оценим скорость сходимости ковариационного приближения многомерной ПВ (10). Рассмотрим систему случайных величин с нулевыми МО, единичными дисперсиями и коэффициентами корреляции $r_{1,2}, \dots, r_{(N-1),N}$. В качестве истинного распределения будем анализировать эллипсоидально симметричное из параметрического семейства

$$\varphi_N(\vec{X}) = f(\vec{X}^T \mathbf{R}^{-1} \vec{X}) / S_1 v_{N-1} \sqrt{\det \mathbf{R}}.$$

Здесь $S_1 = (2\sqrt{\pi^N}) / \Gamma(N/2)$ – площадь поверхности единичной сферы в \mathbb{R}^N ; $f(y^2)$ – одномерное, монотонно убывающее при $y \rightarrow \infty$ распределение с конечным $(N-1)$ -м моментом $v_{N-1} = \int_0^\infty \rho^{N-1} f(\rho^2) d\rho$; $\mathbf{R} = \{r_{n,m}\}$ – $N \times N$ -матрица коэффициентов корреляции. Погрешности ковариационного приближения будем оценивать по критерию абсолютной ошибки, нормированной на значение истинной ПВ в точке МО

$$\Delta(\delta|K) = \pm \max_{F(\vec{X}|\delta)=0} |\varphi_N^{(2)}(\vec{X}) - \varphi_N(\vec{X})| / \varphi_N(0, \dots, 0),$$

где значение погрешности берется с положительным знаком, если $\varphi_N^{(2)}(\vec{X}) \geq \varphi_N(\vec{X})$, и с отрицательным в противном случае. Результаты численного анализа представляют собой параметрическое семейство функции $\Delta(\delta|K)$, рассчитанной по множеству точек на поверхностях гиперэллипсоидов равной плотности

$$F(\vec{X}|\delta) = \vec{X}^T \mathbf{R}^{-1} \vec{X} - f^{(-1)}(\delta J_0) = 0;$$

$$J_0 = S_1 v_{N-1} \varphi_N(0, \dots, 0) \sqrt{\det \mathbf{R}}.$$

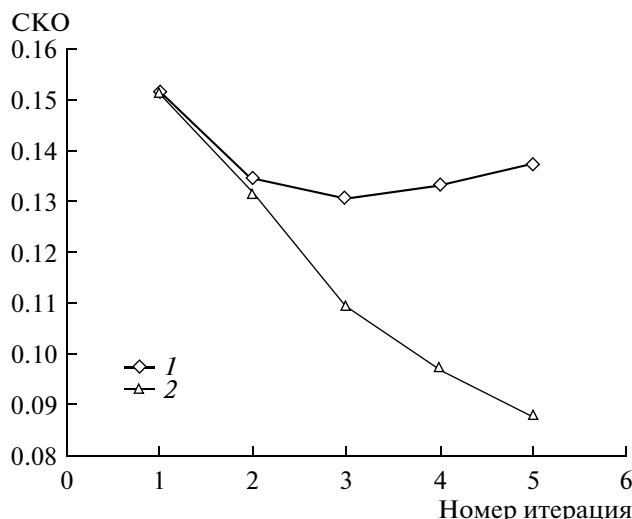


Рис. 3. Сходимость алгоритма решения интегрального уравнения: с ограничениями (1), без ограничений (2).

Здесь $f^{(-1)}(\delta J_0)$ – функция, обратная к радиальному распределению. Уровни истинной плотности рационально задавать в долях $\delta \varphi_N(0, \dots, 0)$ от ее значения в точке математического ожидания. Это обеспечивает инвариантный анализ пространства для различных значений коэффициентов корреляции и одинаковые масштабы по осям δ и Δ .

Рассмотрим специальную задачу вычисления интеграла по N -мерному параллелепипеду $X_n > x_n, n = 1, \dots, N$, важную в приложении к оценкам характеристик выбросов случайных процессов [5, 16–19]. Интегрирование (10) приводит к оценке многомерного интеграла вероятностей

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_N > x_N) \approx P_N^{(2)}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{k_{1,2}} \dots \sum_{k_{(N-1),N}} \frac{b_{1,2}^{k_{1,2}} \dots b_{(N-1),N}^{k_{(N-1),N}}}{k_{1,2}! \dots k_{(N-1),N}!} \prod_{m=1}^N G_{k_m}^{X_m}(x_m), \quad (18)$$

где

$$G_{k_m}^{X_m}(x_m) = \begin{cases} 1 - \Phi_1^{X_m}(x_m), & k_m = 0 \\ -\frac{d^{k_m-1}}{dx_m^{k_m-1}} \{ \Phi_1^{X_m}(x_m) \}, & k_m > 0. \end{cases}$$

Если одномерная плотность распределения $\varphi_1(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона и, таким образом, является весовой функцией соответствующей системы классических ортогональных полиномов $P_k(x), k = 1, 2, \dots$,

Таблица 3. Корреляционное приближение интеграла $P_3(x, x, x)$: слабая корреляция ($r_{1,2} = r_{2,3} = 0.4$; $r_{1,3} = 0.2$)

x	K						$P_3(x, x, x)$
	0	1	2	3	4	5	
0.2	0.074	0.139	0.143	0.143	0.144	0.144	0.144
0.4	0.041	0.088	0.095	0.094	0.096	0.095	0.095
0.6	0.021	0.051	0.06	0.059	0.06	0.06	0.06
0.8	0.01	0.027	0.036	0.035	0.036	0.036	0.035
1.0	0.004	0.013	0.019	0.02	0.02	0.02	0.02
1.2	0.002	0.006	0.01	0.01	0.011	0.011	0.011
1.4	0.001	0.002	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005
1.6	0	0.001	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002

Таблица 4. Корреляционное приближение интеграла $P_3(x, x, x)$: сильная корреляция ($r_{1,2} = r_{2,3} = 0.8$; $r_{1,3} = 0.6$)

x	K						$P_3(x, x, x)$
	0	1	2	3	4	5	
0.2	0.074	0.216	0.237	0.236	0.252	0.242	0.251
0.4	0.041	0.144	0.182	0.169	0.197	0.184	0.188
0.6	0.021	0.088	0.132	0.118	0.149	0.146	0.136
0.8	0.01	0.049	0.089	0.082	0.106	0.113	0.094
1.0	0.004	0.024	0.055	0.056	0.069	0.079	0.063
1.2	0.002	0.011	0.03	0.036	0.042	0.046	0.04
1.4	0.001	0.005	0.015	0.021	0.024	0.024	0.025
1.6	0	0.002	0.007	0.011	0.013	0.011	0.015
1.8	0	0.001	0.003	0.005	0.007	0.006	0.008

то ее производные удобно вычислять с помощью обобщенной формулы Родрига [20]

$$d^{k-1} \{ \varphi_1(x) q^{k-1}(x) \} / dx^{k-1} = c_{k-1} P_{k-1}(x) \varphi_1(x),$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Здесь c_k – функциональный ряд, а $q(x)$ – многочлен не выше второй степени [21, стр. 591]. Из приведенной формулы непосредственно следует

$$d \{ \varphi_1(x) \} / dx = \varphi_1(x) W_1(x);$$

$$W_1(x) = (c_1 P_1(x) - d \{ q(x) \} / dx) / q(x),$$

что по индукции дает

$$d^{k-1} \{ \varphi_1(x) \} / dx^{k-1} = \varphi_1(x) W_{k-1}(x), \quad (19)$$

$$k = 2, 3, \dots$$

Раскрывая левую часть формулы Родрига по теореме Лейбница и подставляя в полученный результат равенство (19), получим рекуррентное со-

отношение для вычисления функций $W_{k-1}(x)$, $k = 2, 3, \dots$

$$W_0(x) = 1;$$

$$W_{k-1}(x) = \frac{1}{q^{k-1}(x)} \times$$

$$\times \left(c_{k-1} P_{k-1}(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(k-1)!}{(k-j-1)! j!} W_{k-j-1}(x) \frac{d^j}{dx^j} \{ q^{k-1}(x) \} \right).$$

В случае гауссовского распределения выражение для производных одномерных плотностей значительно упрощается

$$\frac{d^{k-1}}{dx_n^{k-1}} \{ \varphi_1^{X_n}(x_n) \} = \left(-\frac{1}{\sqrt{b_{n,n}}} \right)^{k-1} H_{k-1} \left(\frac{x_n - a_n}{\sqrt{b_{n,n}}} \right) \varphi_1^{X_n}(x_n),$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Здесь $a_n = \langle X_n \rangle$ – МО случайной величины X_n , а $H_k(x)$ – полином Чебышева–Эрмита степени k

$$H_0(x) = 1; \quad H_1(x) = x;$$

$$H_{k+1}(x) = xH_k(x) - kH_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

В частном случае, когда

$$x_1 = x_2 = \dots = x_N = 0; \quad \varphi_1^{X_n}(x) = \exp(-x^2/2) / \sqrt{2\pi},$$

$$n = 1, \dots, N,$$

оценка (18) тождественно совпадает с полученной Кендаллом оценкой нормального многомерного интеграла (см. [3]).

Численный анализ сходимости рядов (10) и (18) проводился для трехмерного гауссовского распределения и значений коэффициентов корреляции $r_{1,2} = r_{2,3} = -0.4 \dots 0.8$ и $r_{1,3} = -0.6 \dots 0.6$ с шагом 0.2 для всех возможных комбинаций, при которых обобщенная дисперсия нормальной плотности положительна. В качестве истинных значений нормального тройного интеграла применялись значения $P_3(x, x, x)$, табулированные в [5]. Типичные результаты вычислений приведены в табл. 3 и 4 и на рис. 4–9.

Численные эксперименты показали, что усечение ряда (10) конечным числом членов до $K \leq 5$ не приводит к появлению отрицательных значений ковариационного приближения трехмерной ПВ внутри эллипсоида равной плотности по уровню $\delta = 0.1$, поскольку графики функции $\Delta(\delta|K)$ не опускаются ниже биссектрисы четвертого квадранта (см. рис. 4, 6 и 8).

В случае слабой корреляции ($|r_{n,m}| \leq 0.5$) ряды (10) и (18) ведут себя регулярно и уже при $K = 2$ дают приемлемо точные приближения к истинным значениям (рис. 4, 5). Для плотности распределе-

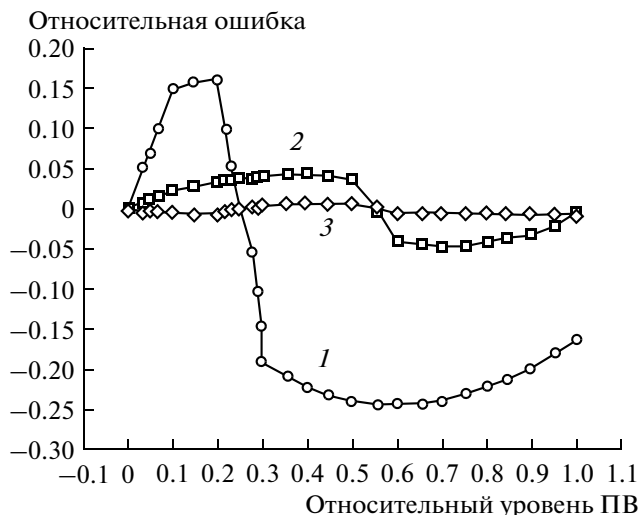


Рис. 4. Относительная ошибка приближения нормальной ПВ в случае слабой корреляции ($r_{1,2} = r_{2,3} = 0.4; r_{1,3} = 0.2$): $K = 0$ (1); 2 (2); 5 (3).

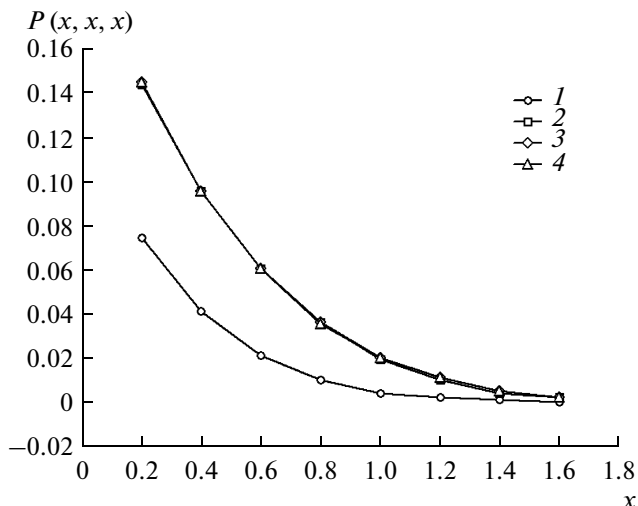


Рис. 5. Зависимость интеграла вероятностей $P(x, x, x)$ от порога x в случае слабой корреляции ($r_{1,2} = r_{2,3} = 0.4; r_{1,3} = 0.2$): $K = 0$ (1); 2 (2); 5 (3); табулированная оценка (4).



Рис. 6. Относительная ошибка приближения нормальной ПВ в случае сильной корреляции ($r_{1,2} = r_{2,3} = 0.8; r_{1,3} = 0.6$): $K = 0$ (1); 2 (2); 5 (3).

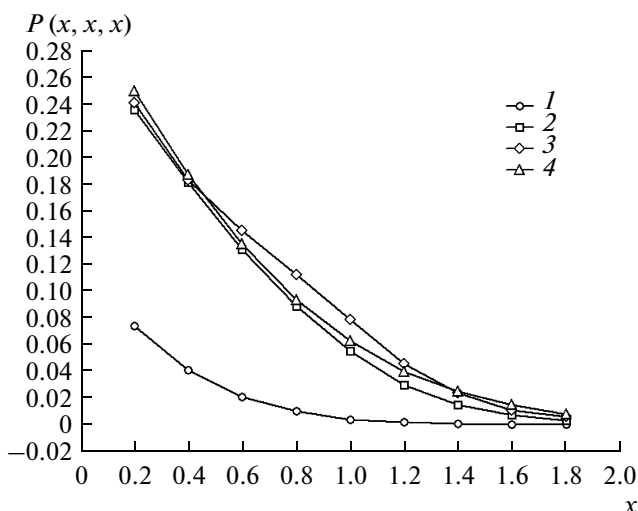


Рис. 7. Зависимость интеграла вероятностей $P(x, x, x)$ от порога x в случае сильной корреляции ($r_{1,2} = r_{2,3} = 0.8; r_{1,3} = 0.6$): $K = 0$ (1); 2 (2); 5 (3); табулированная оценка (4).

ния $|\Delta(\delta|K)| \leq 0.15$, а наибольшее относительное отклонение от истинного значения нормального тройного интеграла (см. табл. 3)

$$\varepsilon(x|K) = \max_x \left| \frac{P_3^{(2)}(x, x, x)}{P_3(x, x, x)} - 1 \right| \leq 0.2.$$

В случае сильной корреляции ряды (10) и (18) ведут себя нерегулярно (рис. 6, 7). Для $0.2 \leq x \leq 0.8$ ряд (18) дает точность приближения к $P_3(x, x, x)$ не

хуже $\varepsilon(x|K) \leq 0.25$ при $K = 2$, а для $x > 0.8$ — при $K = 3$ (табл. 4). Дальнейшее увеличение числа членов разложения до $K = 4, 5$ не приводит к существенному увеличению точности ковариационного приближения нормального тройного интеграла в указанном диапазоне изменения аргумента x . Во всех случаях наблюдается смещение ковариационной оценки многомерной ПВ в сторону увеличения ее масштаба.

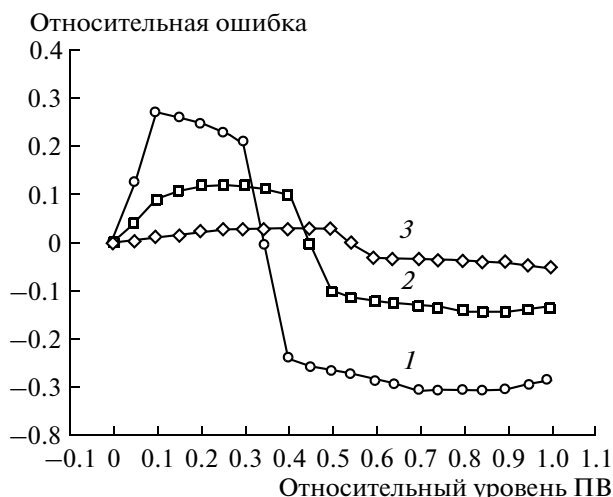


Рис. 8. Относительная ошибка приближения нормальной ПВ в случае отрицательной корреляции ($r_{1,2} = r_{2,3} = 0.2$; $r_{1,3} = -0.6$): $K = 0$ (1); 2 (2); 5 (3).

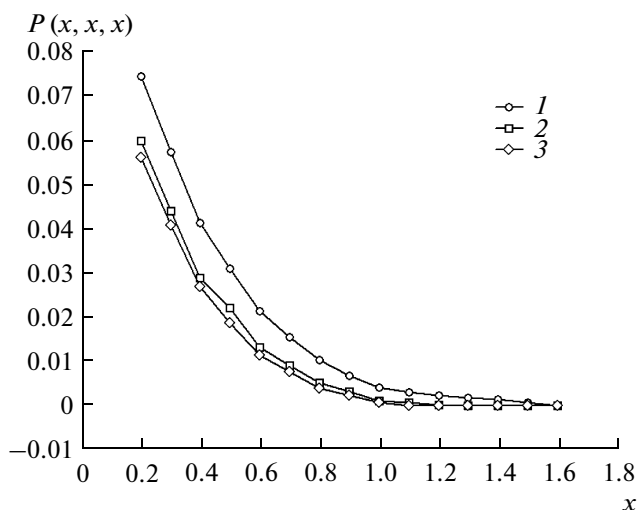


Рис. 9. Зависимость интеграла вероятностей $P(x, x, x)$ от порога x в случае отрицательной корреляции ($r_{1,2} = r_{2,3} = 0.2$; $r_{1,3} = -0.6$): $K = 0$ (1); 2 (2); 5 (3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена практическая методика кумулянтного описания негауссовых распределений. Ее информационной основой являются выборочные оценки одномерных плотностей вероятностей и ковариационной матрицы исходных данных. Получено ковариационное приближение многомерных плотностей и интегралов вероятностей в виде степенного ряда по элементам ковариационной матрицы случайных величин и производным их одномерных интегральных функций распределения. Такого рода модель естественным образом согласуется с непараметрическими, параметрическими и полупараметрическими оценками многомерных распределений. Кроме того, ковариационное представление позволяет мини-

мизировать вычислительные затраты при решении ряда задач статистической радиотехники, радиофизики и цифрового моделирования сложных систем. В частности, ковариационная аппроксимация выборки данных в виде статистически независимой суммы многомерной гауссовой компоненты и негауссовых одномерных составляющих позволяет эффективно решать трудоемкие задачи вычислительной математики методами статистических испытаний. Следует также отметить, что методология кумулянтного описания предусматривает возможность представления негауссовых распределений по ковариациям высших порядков в смысле Р.Л. Стратоновича.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. 2-е изд. М.: Радио и связь, 1982.
2. Beckmann P. // IEEE Trans. 1973. V. AP-21. № 2. P. 169.
3. Мартынов Г.В. // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика / Под ред. Гамкрелидзе Р.В. М.: ВИНТИ. 1979. Т. 17. С. 23.
4. Chambers M. // Biometrika. 1967. V. 54. № 3–4. P. 367.
5. Фомин Я.А. Теория выбросов случайных процессов. М.: Связь, 1980.
6. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.
7. Devroye L., Györfi L. Nonparametric Density Estimation: The L1 View. N. Y.: John Wiley & Sons, 1985.
8. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов М: Наука, 1979.
9. Cramer H. Mathematical Methods of Statistics. Princeton: Univ. Press, 1946.
10. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1986.
11. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности: Справ. изд. / М.: Финансы и статистика, 1989.
12. Минами С., Утида Т., Кавата С. и др. Обработка экспериментальных данных с использованием компьютера / Пер. с яп. М.: Радио и связь, 1999.
13. <http://www.2stocks.ru/main/invest/stocks/info/finance>
14. Шурыгин А.М. Прикладная стохастика: робастность, оценивание, прогноз. М.: Финансы и статистика, 2000.
15. Scott D.W. Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization. N. Y.: John Wiley, 1992.
16. Лабунец Л.В. // Радиотехника. 1985. № 11. С. 47.
17. Лабунец Л.В. // Радиотехника. 1986. № 9. С. 64.
18. Лабунец Л.В. // РЭ. 2000. Т. 45. № 12. С. 1459.
19. Лабунец Л.В. // РЭ. 2001. Т. 46. № 4. С. 464.
20. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. 2-е изд. М.: Наука, 1979.
21. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М: Наука, 1979.